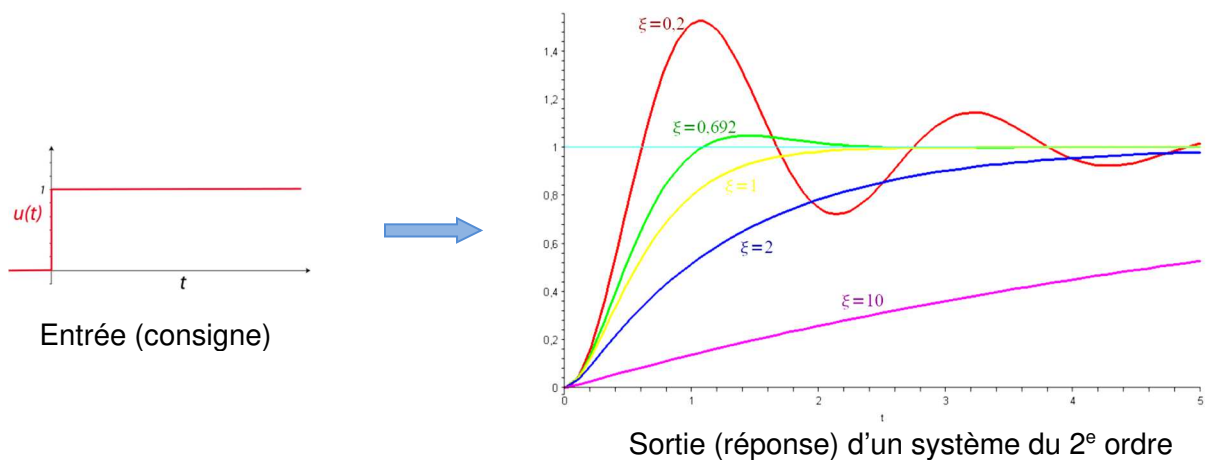
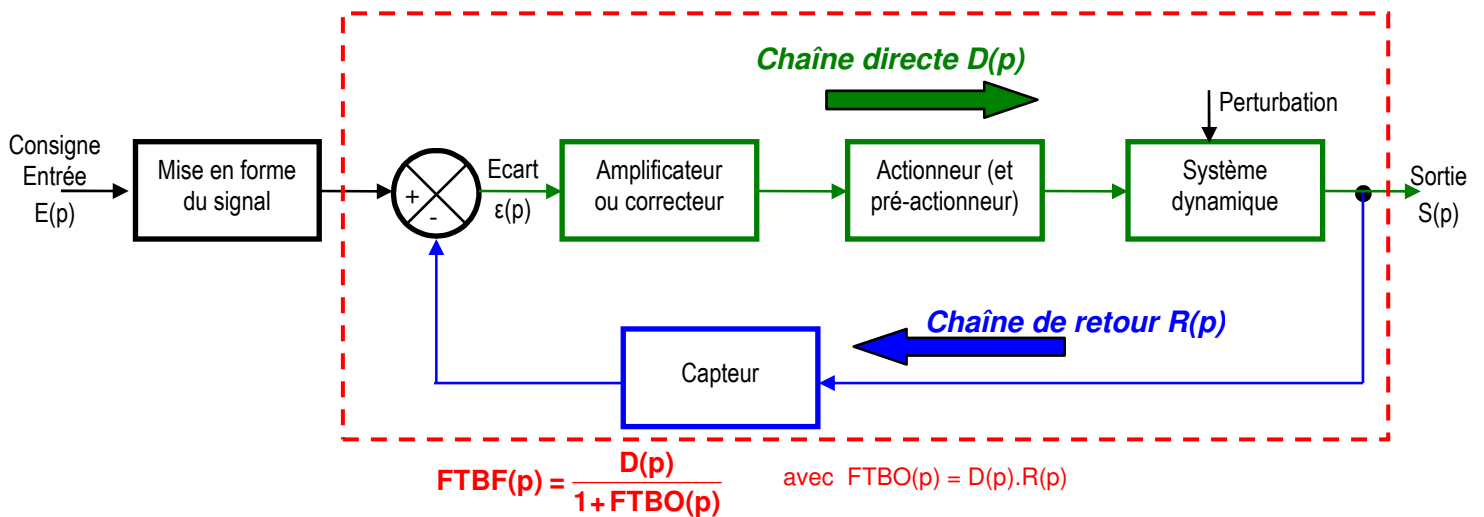


SLCI : SYSTÈMES ASSERVIS

SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

PARTIE 1 : PRÉSENTATION ET ÉTUDE TEMPORELLE

(COURS)



SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS ET INVARIANTS

Table des matières de la 1^{ère} partie

1	Présentation des systèmes asservis	1
1.1	Définitions : automatique et automatisation	1
1.2	Structure d'un système asservi	2
1.3	Limite d'étude (linéarité, continuité, invariance)	3
1.4	Critères quantifiant les performances d'un SLCI	5
1.5	Schématisation par schéma-bloc fonctionnel	6
2	Modélisation dans le domaine de Laplace	8
2.1	Démarche de modélisation et d'étude des systèmes asservis	8
2.2	Modélisation des SLCI par équation différentielle	8
2.3	Transformée de Laplace et fonction de transfert	9
2.3.1	Définition de la transformée de Laplace	9
2.3.2	Propriétés	10
2.3.3	Fonction de transfert (transmittance) d'un système linéaire	12
2.3.4	Transformée de Laplace d'entrées usuelles	13
2.4	Manipulation des schémas-blocs et des fonctions de transfert	14
2.4.1	Manipulations de base	14
2.4.2	Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) / en Boucle Fermée (FTBF)	16
2.4.3	Système multi-variables (multi-entrées) : Superposition	18
3	Analyse temporelle de SLCI particuliers	20
3.1	Système à action proportionnelle (gain pur)	20
3.2	Système intégrateur	20
3.3	Système du 1 ^{er} ordre	21
3.4	Système du 2 ^e ordre	24
3.5	Identification temporelle à un modèle	28
	ANNEXES	32
A1	Abaque des dépassements relatifs d'un 2 ^e ordre oscillant	32
A2	Tableau des transformées de Laplace des fonctions usuelles	33

1) PRÉSENTATION DES SYSTÈMES ASSERVIS

1.1) Introduction aux systèmes automatisés

L'**automatique** est à la fois une science et une technique qui étudie les méthodes scientifiques et les moyens techniques pour la conception et la réalisation des systèmes automatisés.

L'**automatisation** est l'exécution totale ou partielle de tâches domestiques, industrielles, administratives ou scientifiques sans intervention humaine.

Systèmes à événements discrets (automatique discrète ou logique) :

Les systèmes à événements discrets (SED) sont des systèmes dont l'état change seulement à certains instants, lors de l'occurrence d'événements particuliers, et dont les variables sont discrètes, c'est-à-dire ayant une valeur parmi un nombre fini de valeurs possibles. Ces systèmes peuvent être combinatoires ou séquentiels, et seront étudiés lors d'un chapitre à part, plus tard dans l'année.

Exemples :

	Grandeurs d'entrée	Grandeurs de sortie
Ouvre-portail (combinatoire)	Bouton ouverture Bouton fermeture ...	Mettre en marche le moteur Allumer borne lumineuse
Trieuse de pièces (séquentiel)	Présence de pièces Boutons du pupitre ...	Nombre de pièces de chaque catégorie ...



Systèmes continus :

Les grandeurs d'entrée et de sortie évoluent de manière continue en fonction du temps. On désire que la sortie suive avec précision les variations de l'entrée (consigne) et ceci, avec un temps de réponse minimal.

Exemples :

	Grandeurs d'entrée	Grandeurs de sortie
Axe de robot cueilleur	Angle de l'axe souhaité θ_{consigne}	Angle de l'axe réel θ
Direction assistée de véhicule	Angle de braquage souhaité θ_c	Angle de braquage réel θ
Cordeuse de raquette	Tension de la corde souhaitée T_c	Tension de la corde réelle T

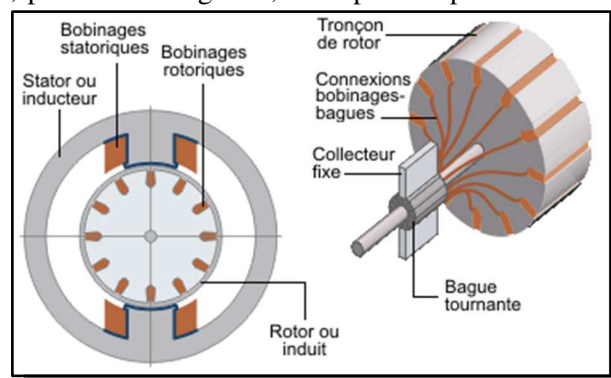
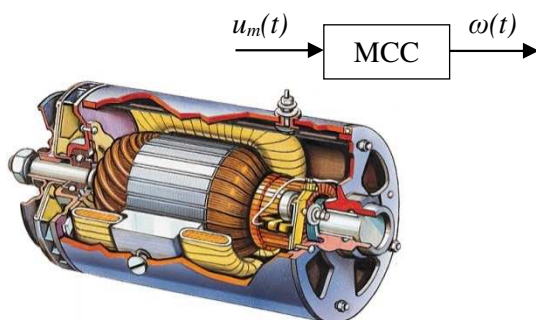


Exemple d'un moteur à courant continu (MCC)

Cet exemple servira l'illustration durant tout ce cours sur les systèmes asservis. Ce moteur est un composant très utilisé dans les systèmes multiphysiques étudiés en CPGE et présents au concours.

Un moteur à courant continu dont le flux inducteur est constant (aimant permanent) est commandé par la tension appliquée à son induit. Il se comporte comme un système dont l'entrée est la tension électrique à ses bornes $u_m(t)$ et la sortie la vitesse angulaire du rotor par rapport au stator $\omega(t)$.

Le moteur peut recevoir une tension quelconque, positive ou négative, ne dépassant pas une valeur limite (qui risquerait de l'endommager).

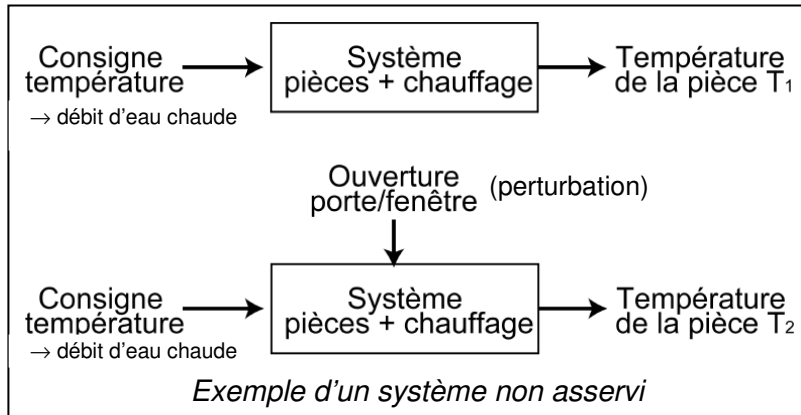


Question : le MCC est-il un système à événements discrets ou continu ?

1.2) Structure d'un système asservi

• Système non asservi (commande en chaîne directe)

Un système automatique **non asservi** peut parfaitement fonctionner tant qu'il n'est pas perturbé, mais présenter un **comportement inadapté lorsqu'une perturbation intervient**. La sortie obtenue n'est alors plus la valeur attendue initialement.



Exemple : chauffage automatique d'une pièce. Si l'on veut une température T_1 , on envoie un certain débit d'eau chaude (Q) dans les radiateurs. Ce débit compense les pertes thermiques des pièces et la température obtenue est donc stable à T_1 s'il n'y a pas de perturbations.

Si l'on ouvre une fenêtre ou une porte (perturbation), la température obtenue est T_2 (non désirée).

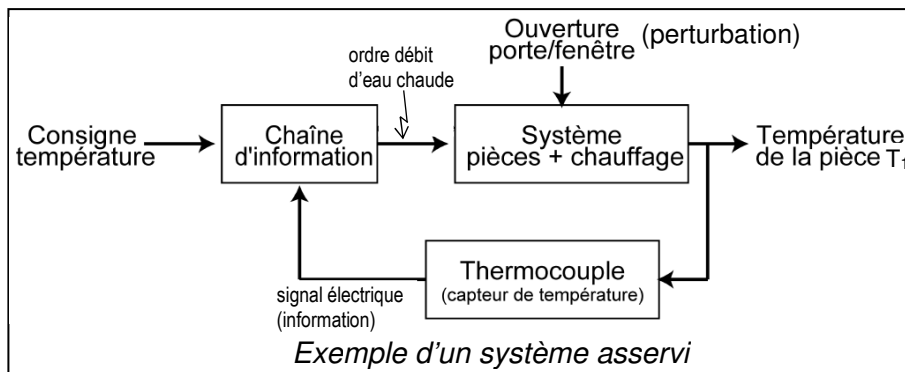
• Système asservi (commande en chaîne fermée)

Définition : Un système asservi est un système pour lequel on asservit la valeur de la sortie à la valeur de la consigne. C'est un système automatisé **bouclé**.

Dire que le système est asservi est un abus de langage. En fait, c'est la grandeur de sortie du système qui est asservie (asservie à l'entrée).

L'asservissement est réalisé grâce à une **boucle de retour**. Cette boucle est généralement constituée d'un **capteur**, qui permet de mesurer l'état de la sortie à chaque instant. Cette information est analysée par la chaîne d'information (voir cours « Analyse des systèmes »), et comparée à la consigne d'entrée.

L'écart entre la valeur de la consigne et la valeur de la sortie permet au calculateur d'élaborer un ordre vers la chaîne d'énergie.



Exemple : chauffage automatisé d'une pièce. Un capteur permet de mesurer la température de la pièce, le calculateur de la chaîne d'information peut alors élaborer un ordre destiné à la chaîne d'énergie, afin d'imposer un débit d'eau chaude adapté.

• Système asservi régulateur ou suiveur

- ✓ Système asservi de **régulation** : la consigne d'entrée est fixe. Il est destiné à **maintenir une sortie constante**.

Exemples : régulateur de température, de débit, de vitesse de voiture, de niveau d'eau de piscine ; pacemaker ; climatisation ...



climatisation de voiture

- ✓ Système asservi **suiveur (ou en poursuite)** d'une loi de référence : la **consigne d'entrée varie en permanence**.

Exemples : suiveurs solaires, missiles à tête chercheuse, radars ...



Exemple d'un moteur à courant continu (MCC)

Compléter le schéma ci-dessous en ajoutant les deux composants manquants indispensables pour que le moteur soit asservi en vitesse $\omega(t)$ et indiquer où se trouve la consigne de vitesse souhaitée $\omega_c(t)$.



Si l'on souhaite avoir une consigne de vitesse **constante** (comme dans un régulateur de vitesse), le moteur asservi sera-t-il régulateur ou suiveur ?

Si l'on souhaite **faire varier** progressivement la vitesse afin d'accélérer un système, le moteur asservi sera-t-il régulateur ou suiveur ?

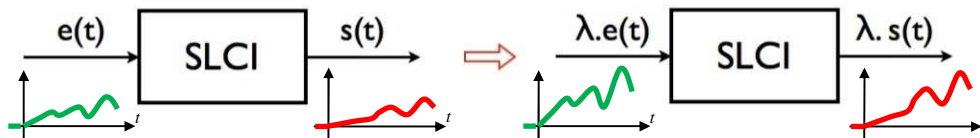
1.3) Limite d'étude (linéarité, continuité, invariance)

Dans ce cours, nous nous limiterons aux Systèmes Linéaires Continus et Invariants :

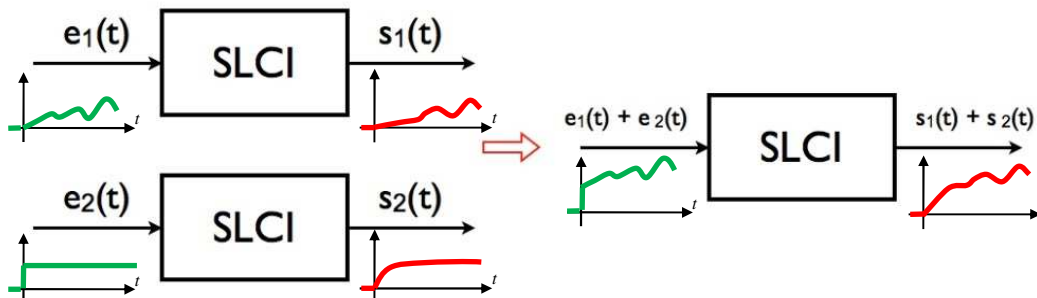
- **Linéaire** : les systèmes étudiés respectent le principe de proportionnalité et de superposition :

Proportionnalité : Soit λ un réel. Si la réponse à une entrée $e(t)$ est $s(t)$, la réponse à $\lambda \cdot e(t)$ est $\lambda \cdot s(t)$.

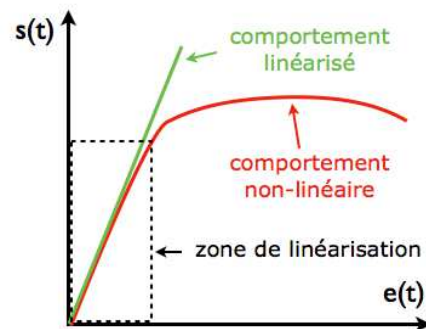
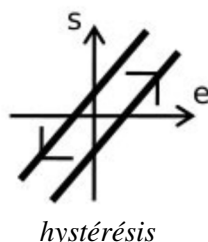
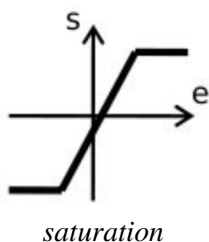
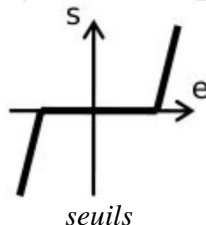
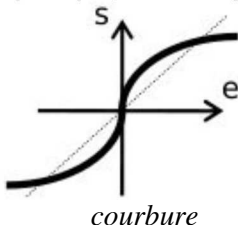
ATTENTION, ceci ne signifie pas que la sortie est proportionnelle à l'entrée !!!



Superposition : Soit $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les réponses respectives aux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$, alors la réponse à l'entrée $e_3(t) = e_1(t) + e_2(t)$ donnée par un système linéaire est $s_3(t) = s_1(t) + s_2(t)$.



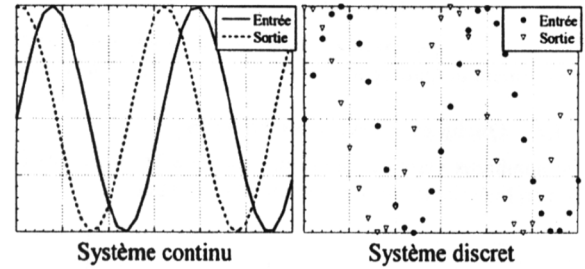
En pratique, tous les systèmes réels présentent des **non-linéarités** sous différentes formes :



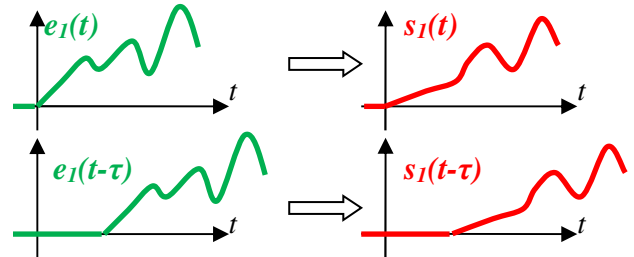
Il est possible de **linéariser** un comportement (autour d'un point de fonctionnement), ou bien de prendre en compte les non-linéarités dans un logiciel de modélisation causal ou acausal

- **Continu** : un système est continu si toutes les fonctions qui décrivent son état et son fonctionnement sont des **fonctions continues du temps**, par opposition aux systèmes **discrets**. Les systèmes continus sont analogiques.

La plupart des systèmes physiques, au niveau macroscopique, sont des systèmes continus. Dans les systèmes de commande modernes, l'information est souvent traitée par des systèmes informatiques, ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. On parle dans ce cas de systèmes échantillonnés ou discrets.

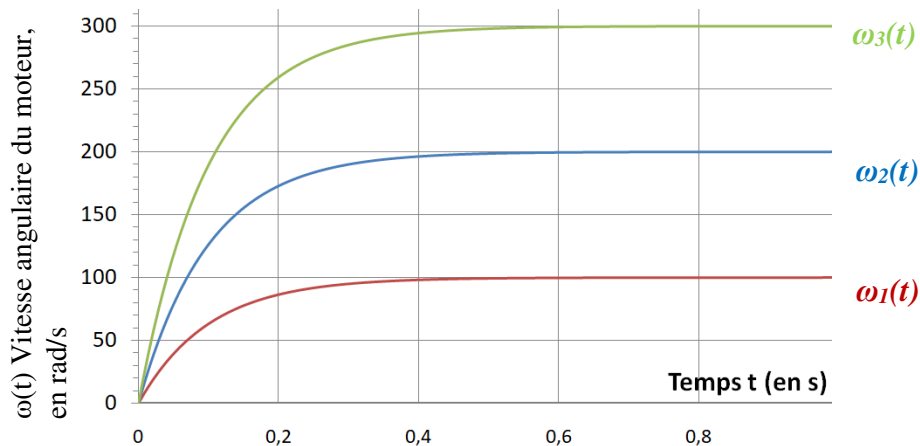


- **Invariant** : le système ne vieillit pas : son comportement dans le temps reste inchangé (si on reproduit la même expérience à deux dates différentes, on obtiendra les mêmes résultats). Mathématiquement, cela se traduit par l'équation : si à une entrée $e_I(t)$ correspond une sortie $s_I(t)$, alors à une entrée $e_I(t-\tau)$ correspondra la sortie $s_I(t-\tau)$.



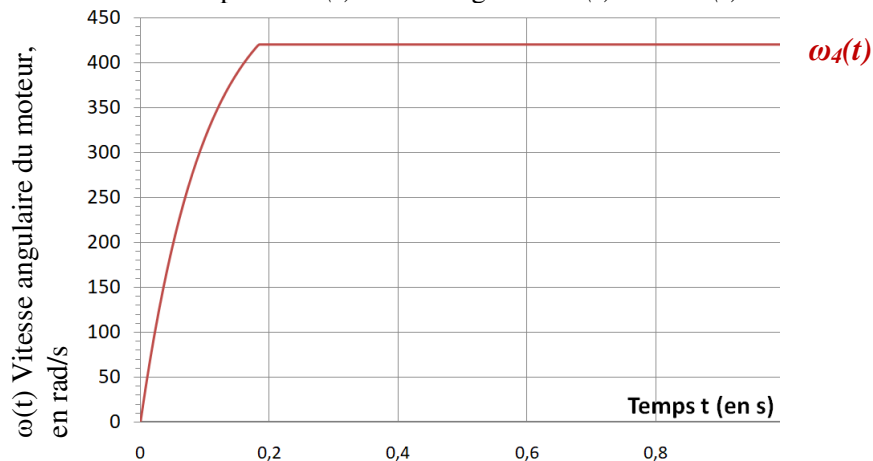
Exemple d'un moteur à courant continu (MCC)

Soit deux consignes différentes $\omega_{C1}(t) = 100 \text{ rad/s}$ (démarrant à $t=0$) et $\omega_{C2}(t) = 2.\omega_{C1}(t)$ envoyées séparément au moteur asservi. On enregistre alors les réponses du moteur à ces deux consignes, respectivement $\omega_1(t)$ puis $\omega_2(t)$, et enfin la réponse $\omega_3(t)$ à la consigne « $\omega_{C1}(t) + \omega_{C2}(t)$ ».



Question : le moteur asservi est-il linéaire dans cette plage de fonctionnement ? Justifier et nommer éventuellement la non-linéarité présente.

Voici maintenant ci-dessous la réponse $\omega_4(t)$ à la consigne « $\omega_{C4}(t) = 5.\omega_{C1}(t)$ ».



Question : le moteur asservi est-il linéaire dans cette plage de fonctionnement ? Justifier et nommer éventuellement la non-linéarité présente.

1.4) Critères quantifiant les performances d'un SLCI

Afin d'analyser les performances (**précision**, **rapidité**, **stabilité** et **amortissement**) d'un système, on le sollicite à une variation de l'entrée et on étudie la réponse (ou sortie) du système.

En sortie, on distinguera deux régimes, le régime transitoire, et le régime permanent.

Le **régime transitoire** est le régime d'évolution d'un système qui n'a pas encore atteint un état stable.

Cela correspond donc au laps de temps s'écoulant après une modification de la sollicitation du système.

Le **régime permanent** s'établit après un temps plus ou moins long, lorsque le système se stabilise.

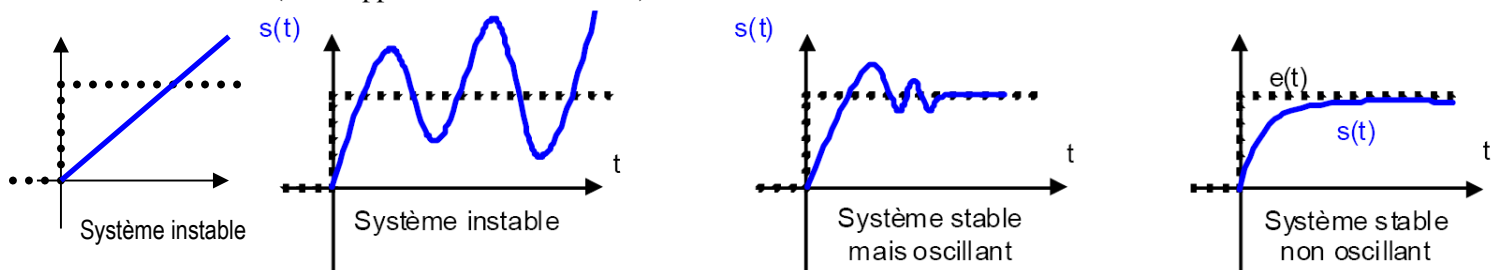
• Stabilité

Un système est stable si lorsqu'il est éloigné de sa position d'équilibre, il tend à y revenir.

On peut aussi dire qu'un système est stable si à une entrée bornée il répond par une sortie bornée.

Pour une entrée en échelon, la stabilité d'un système est caractérisée par sa **capacité à converger**.

Amortissement : L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la valeur de sortie. Il se mesure en régime transitoire, et n'existe que pour des systèmes oscillants (aussi appelés « sous-amortis »).

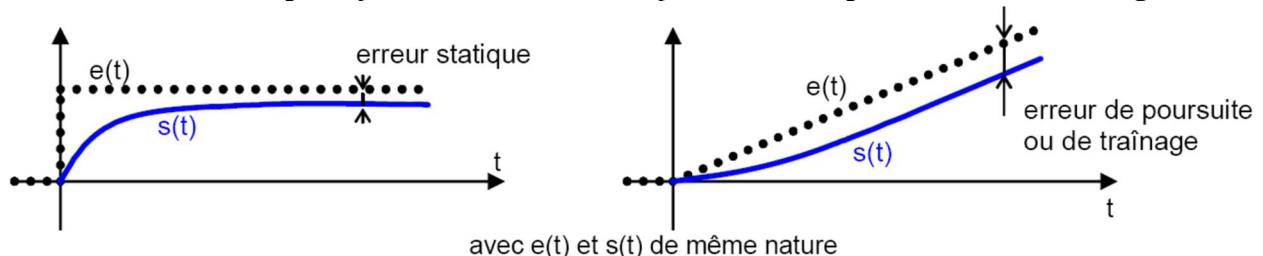


• Précision

La précision est la capacité de la réponse du système à être proche de la consigne, en régime permanent.

Pour une entrée en **échelon**, la précision est caractérisée (quantifiée) par l'**erreur statique**.

Pour une entrée en **rampe**, la précision est caractérisée par l'**erreur de poursuite (ou de trainage)**.



Erreur (dynamique) : $Er(t) = e(t) - s(t)$ à l'instant t .

Erreur statique : erreur en régime permanent $Er(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$ avec en entrée un échelon.

Erreur de poursuite ou de trainage : erreur en régime permanent $Er(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$ avec en entrée une rampe.

• Rapidité

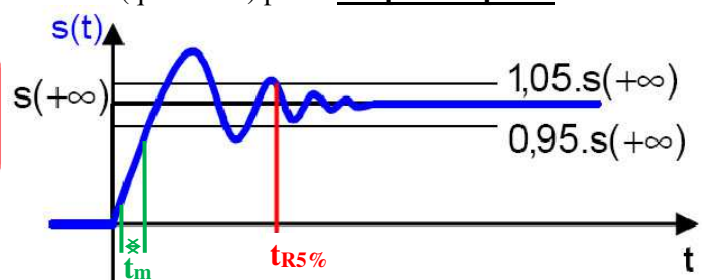
La rapidité d'un système est sa capacité à entrer rapidement en régime permanent.

La rapidité d'un système asservi est étroitement liée à son inertie (masse mise en mouvement).

Pour une entrée en échelon, la rapidité peut être caractérisée (quantifiée) par le **temps de réponse**.

Le temps mis par la réponse pour atteindre à moins de 5% sa valeur finale $s(+\infty)$ est souvent retenu comme critère de rapidité : **tr5%**

Attention !!! Ce n'est pas le temps mis pour atteindre la valeur souhaitée à $\pm 5\%$.

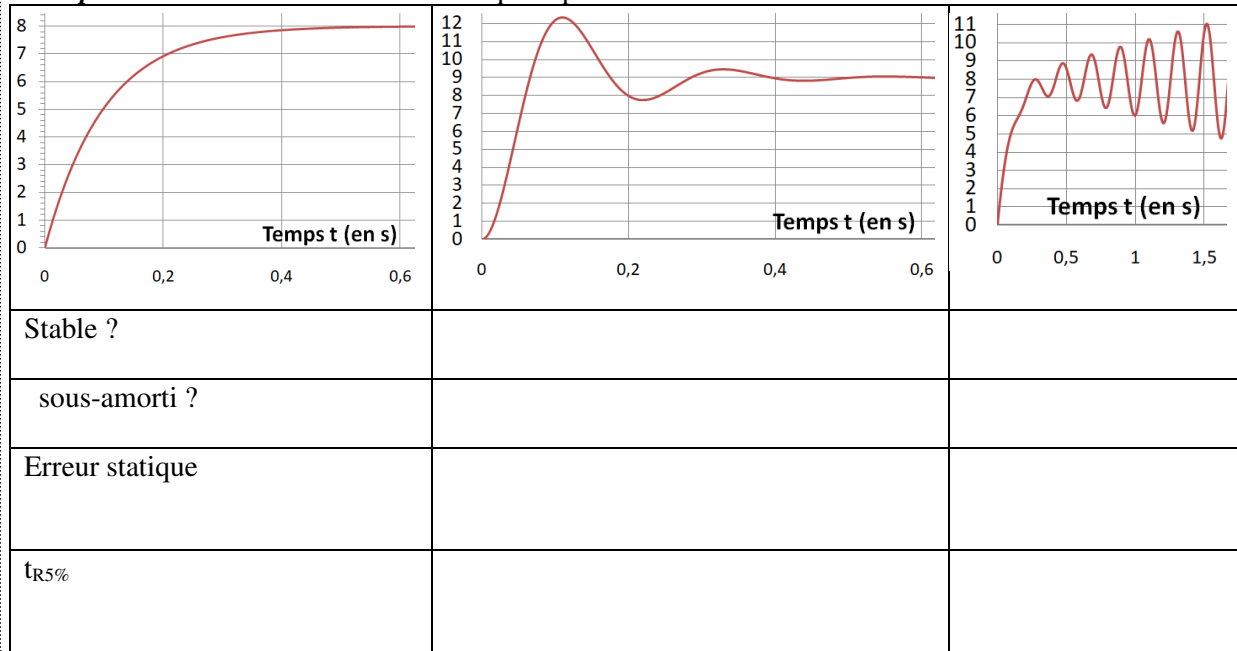


La rapidité peut aussi être quantifiée par le **temps de montée** t_m (toujours pour une entrée en échelon) : temps mis par la grandeur de sortie pour passer de 10% de sa valeur finale à 90% de sa valeur finale.

Exemple d'un moteur à courant continu (MCC)

Voici les trois réponses (en rad/s) d'un MCC différemment asservi (les correcteurs sont différents), soumis à une consigne constante de 10 rad/s (à partir de $t=0$).

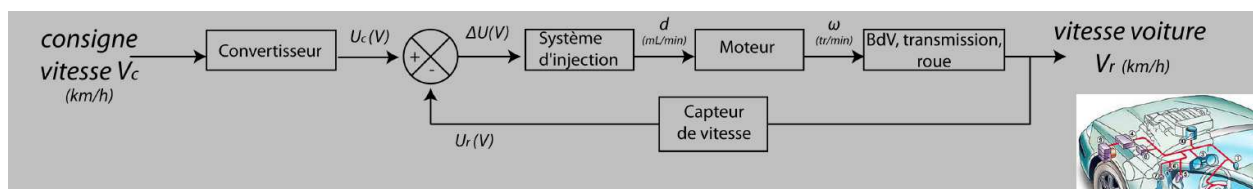
Compléter le tableau en-dessous de chaque réponse.



1.5) Schématisation par schéma-blocs fonctionnel

Les systèmes industriels étant par nature complexes, il est nécessaire de décomposer le système en sous-systèmes plus facilement modélisables. Par assemblage des différents modèles, il sera possible de déduire son comportement global.

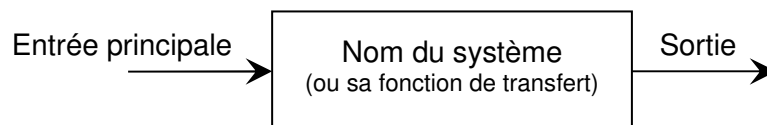
Pour représenter un système automatique, on utilise un schéma-blocs fonctionnel mettant en relation les entrées et sorties du système ou sous-système, et permettant de comprendre la structure du système.



Exemple : Schéma-blocs fonctionnel d'un régulateur de vitesse de voiture

Le schéma-blocs fonctionnel est constitué à partir des trois éléments suivants:

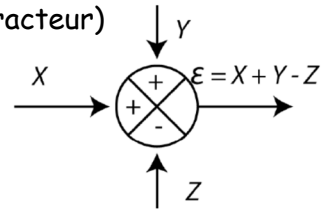
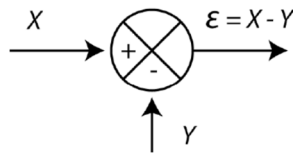
- **Le bloc**



Le nom du système est en général le nom du composant (moteur, réducteur, roue...) ou bien encore l'opérateur mathématique associé à une fonction particulière (exemple : l'opérateur $\int$ pour décrire une intégration (passage d'une vitesse à une position par exemple)). La sortie est fonction de l'entrée selon l'opération mathématique (« fonction de transfert ») modélisant la loi entrée/sortie du système – cf. domaine de Laplace dans les chapitres suivants :

$$\text{sortie} = \text{entrée} \times \text{« fonction de transfert »}.$$

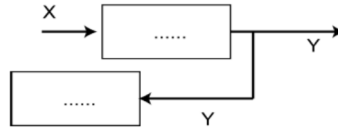
- **Le comparateur** (ou point de sommation ou sommateur ou soustracteur)



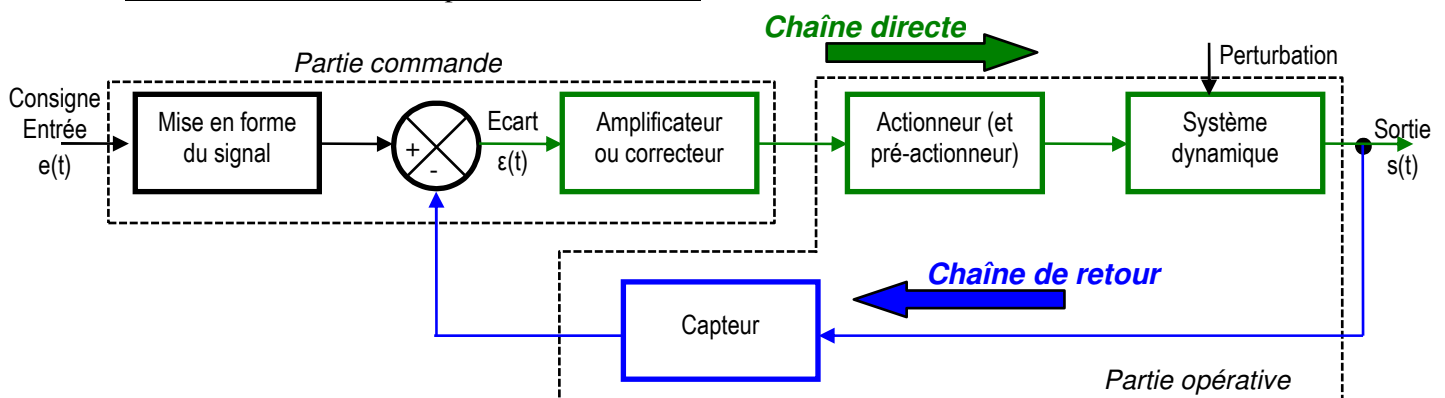
Le comparateur permet de modéliser l'action de comparaison effectuée par le calculateur.

Attention : Le comparateur doit toujours comparer des valeurs comparables, c'est à dire de même unité (Volts généralement), et représentant le même type de grandeur (vitesse, température, ...).

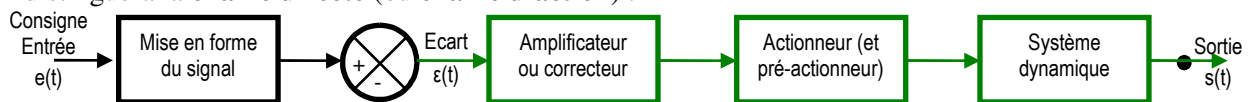
- **Le point de prélèvement** (ou de jonction)



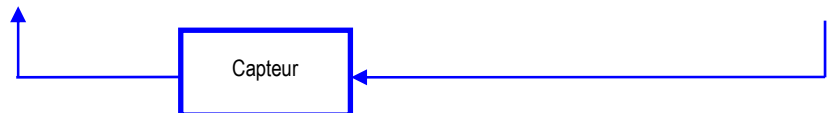
Un **système automatique asservi mécatronique** présente généralement une structure en schéma-bloc fonctionnel comme celle représentée ci-dessous :



On distinguera la **chaîne directe** (ou **chaîne d'action**) :



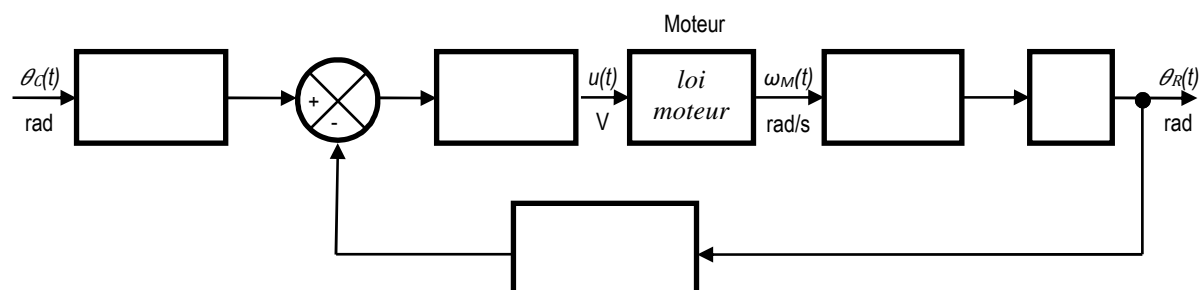
Et la **boucle de retour** (ou **chaîne d'observation**) :



Exemple d'un motoréducteur à courant continu (MCC) asservi en position se composant de :

- un moteur recevant une tension $u(t)$ (en V) et tournant à une vitesse angulaire $\omega_M(t)$ (en rad/s) selon une loi que nous étudierons plus tard, notée « loi moteur » ;
- un réducteur tournant à une vitesse $\omega_R(t) = \omega_M(t) / 10$;
- un capteur de position angulaire proportionnel produisant 1V pour 2rad ;
- un système de traitement de la consigne $\theta_C(t)$, de fonction de transfert identique au capteur ;
- un correcteur multipliant l'écart en sortie de comparateur $\varepsilon(t) = u_C(t) - u_R(t)$ par un facteur 20.

Compléter le schéma-blocs ci-dessous avec le nom de chaque composant au-dessus de chaque bloc, la fonction de transfert dans le bloc, et les grandeurs physiques avec leurs unités entre les blocs.



2) MODÉLISATION DANS LE DOMAINE DE LAPLACE

2.1) Démarche de modélisation et d'étude des systèmes asservis

Modéliser signifie concevoir un modèle théorique (mathématique).

La modélisation fournit une image ou représentation d'un phénomène réel, dans le but soit d'améliorer les performances d'un système existant, soit de concevoir un nouveau système (choix des différents éléments constituant la chaîne fonctionnelle).

Il existe deux méthodes de détermination du modèle d'un système :

- Le **modèle de connaissance** : il s'établit directement à partir de l'analyse du système, en mettant en œuvre les lois fondamentales de la physique. On parle alors de **modélisation**. Les hypothèses choisies pour écrire ces lois sont alors primordiales.

Exemple : l'établissement du courant i dans une bobine (R, L) soumise à une tension u est décrit

par l'équation différentielle : $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$

Ceci constitue le modèle de connaissance d'une bobine dans l'hypothèse de non saturation du circuit magnétique (d'où L constante) et de température constante (d'où R constante).

- Le **modèle de comportement** : il s'établit sur la base de l'étude des signaux de sorties obtenus en fonction des signaux d'entrée appliqués au système à modéliser. Celui-ci est vu comme une boîte noire dont on ne connaît que les flux (signaux) entrant et sortant. On ne considère pas la physique interne du système mais on fait quand même l'hypothèse d'une structure mathématique liant la sortie à l'entrée du système, qui sera, pour le cas qui nous intéresse (SLCI), une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

On cherchera alors, **de manière expérimentale**, à déterminer les coefficients de l'équation supposée. Ce processus s'appelle l'**identification** (cf. chapitre 5 : « Identification à un modèle »).

Exemple : L'évolution de la température θ d'un four électrique recevant une puissance P est

supposée modélisable par l'équation différentielle : $b_0 \cdot P(t) = a_1 \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} + a_0 \cdot \theta(t)$

En appliquant différents signaux à l'entrée du four, on étudie l'évolution de la température (c'est-à-dire la sortie) et on essaie d'identifier les coefficients constants a_0 , a_1 et b_0 .

2.2) Modélisation des SLCI par équation différentielle

Les SLCI étudiés seront représentables la plupart du temps par des équations différentielles à coefficients constants liant la grandeur d'entrée $e(t)$ à la grandeur de sortie $s(t)$.

D'une manière générale, un système linéaire continu invariant peut être modélisé par une **équation différentielle d'ordre n** , linéaire et à coefficients constants, qui s'écrit sous la forme :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

où $s(t)$ est la sortie, et $e(t)$ est l'entrée.

Le système correspondant sera donc un système d'ordre n .

Dans un système causal, c'est-à-dire lorsque la cause précède l'effet (tout système physique) : $n \geq m$.

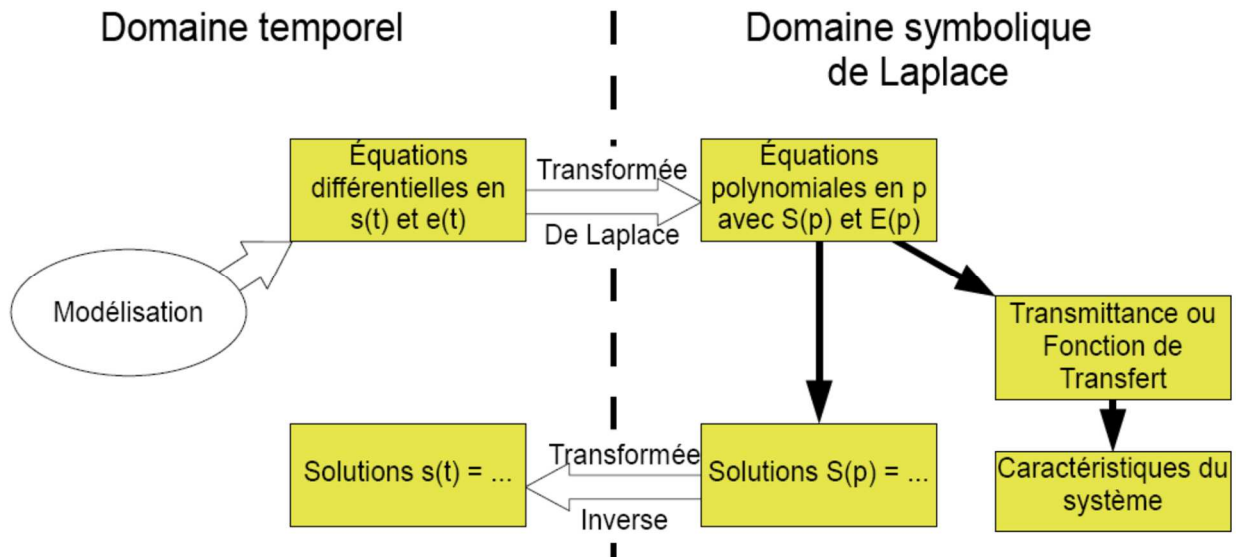
Deux modèles de systèmes fondamentaux sont couramment rencontrés et étudiés dans le cadre de la PTSI : les systèmes du premier ordre et les systèmes du deuxième ordre.

2.3) Transformée de Laplace et fonction de transfert

Les équations différentielles obtenues après modélisation des SLCI sont complexes à résoudre. La méthode analytique de résolution vue en cours de mathématiques ne sera pas employée.

Afin de simplifier cette résolution, on utilisera la transformée de Laplace, qui pourra nous permettre également de déterminer les fonctions caractéristiques du système (Fonction de Transfert) sans résoudre d'équation différentielle.

La démarche globale est la suivante :



2.3.1) Définition de la transformée de Laplace

Soit une fonction $f(t)$ à valeurs de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$ (fonction causale). On appelle transformée de Laplace (monolatérale) la transformation :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt$$

avec p une **variable complexe**, dont l'unité est en s^{-1} : $p = a + j \cdot b$ avec $j^2 = -1$

$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$: transformée de Laplace de la fonction f .

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$: transformée inverse de la fonction F .

Cette définition n'est pas à retenir (elle ne figure pas au programme officiel de CPGE).

Remarques :

- La variable p peut aussi être notée avec la lettre s
- On a l'habitude de noter la transformée de Laplace par une majuscule quand cela est possible : $\omega(t) \rightarrow \Omega(p)$, $v(t) \rightarrow V(p)$. Cependant, on confond parfois les notations si la grandeur originelle est déjà en majuscule : $C(t) \rightarrow C(p)$ pour les couples par exemple.

2.3.2) Propriétés de la transformée de Laplace

1. Unicité

À une $f(t)$ correspond une $F(p)$ unique.

À une $F(p)$ correspond une $f(t)$ unique.

2. Linéarité

Soit a et b des constantes réelles :

$$L[a.f_1(t) + b.f_2(t)] = a.L[f_1(t)] + b.L[f_2(t)] = a.F_1(p) + b.F_2(p)$$

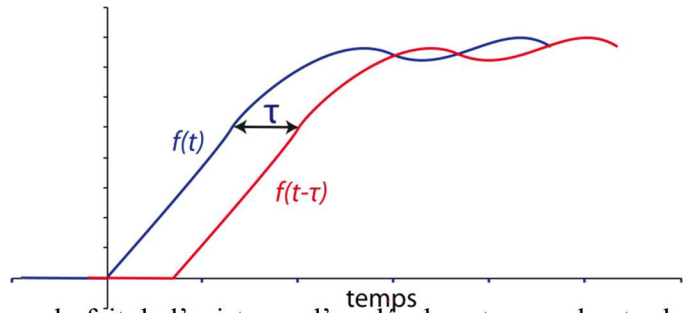
Démonstration : triviale par linéarité de l'intégrale.

3. Théorème du retard

Soit $f(t)$ une fonction dont la transformée de Laplace existe, $f(t-\tau)$ est la même fonction, mais décalée d'un temps τ .

$$L[f(t-\tau)] = e^{-\tau.p}.F(p)$$

où $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.



Ce théorème est d'une grande importance pratique du fait de l'existence d'un décalage temporel entre la cause et la conséquence dans un système (dû aux jeux mécaniques, au temps de traitement de l'information...). Ce retard est souvent négligeable, il ne faut pas le confondre avec le temps de réponse.

Démonstration : Soit $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$. Calculons $\int_0^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt$.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt &= \int_0^{\tau} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt \\ \int_0^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt &= \int_0^{\tau} 0.e^{-p.t}.dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt = \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt \\ \text{En posant } t-\tau &= T, \text{ soit } t = T+\tau \text{ et } dt = dT : \\ \int_{\tau}^{+\infty} f(t-\tau).e^{-p.t}.dt &= \int_0^{+\infty} f(T).e^{-p.(T+\tau)}.dT = e^{-\tau.p} \cdot \int_0^{+\infty} f(T).e^{-p.T}.dT = e^{-\tau.p} \cdot F(p) \end{aligned}$$

4. Dérivation

Soit $f(t)$ une fonction dérivable : $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p) - f(0)$

Démonstration : Calculons $\int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt}.e^{-p.t}.dt$ en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-p.t} ; dv(t) = \frac{df(t)}{dt}.dt \text{ donc : } du(t) = -p.e^{-p.t} ; v(t) = f(t) \\ \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt}.e^{-p.t}.dt &= \left[f(t).e^{-p.t} \right]_0^{+\infty} + p \cdot \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt = \left[0 - f(0^-).1 \right] + p.F(p) \end{aligned}$$

Soit, pour des conditions initiales nulles (conditions d'Heaviside) :

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p.F(p)$$

Pour la **dérivée seconde** (pour des CI nulles) : $L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2.F(p)$

Démonstration : On intègre $\int_{0^-}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-p.t} .dt$ par parties avec $u(t) = \frac{df(t)}{dt}$ et $dv(t) = e^{-p.t} .dt$

$$\int_{0^-}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-p.t} .dt = \left[-\frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{e^{-p.t}}{p} \right]_{0^-}^{+\infty} + \frac{1}{p} \cdot \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d^2f(t)}{dt^2} \cdot e^{-p.t} .dt = \frac{1}{p} \left[\frac{df}{dt}(0^-) - 0 \right] + \frac{1}{p} \cdot \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d^2f(t)}{dt^2} \cdot e^{-p.t} .dt$$

$$\text{Or } \int_{0^-}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-p.t} .dt = p.F(p) - f(0^-), \text{ donc : } p.F(p) - f(0^-) = \frac{1}{p} \cdot f'(0^-) + \frac{1}{p} \cdot \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d^2f(t)}{dt^2} \cdot e^{-p.t} .dt$$

$$\text{D'où : } \int_{0^-}^{+\infty} \frac{d^2f(t)}{dt^2} \cdot e^{-p.t} .dt = p^2.F(p) - p.f(0) - f'(0)$$

Généralisation du théorème de dérivation (pour des CI nulles) : $L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = p^n.F(p)$

Démonstration : Par récurrence à partir du théorème précédent (dérivée seconde).

5. Intégration

$$L\left[\int_{0^-}^t f(u).du\right] = \frac{F(p)}{p} \quad \text{pour des CI nulles, et où } F(p) = L[f(t)].$$

Démonstration : Posons $g(t) = \int_{0^-}^t f(u).du$. Donc $\frac{dg(t)}{dt} = f(t)$ et $g(0^-) = \int_{0^-}^{0^-} f(u).du = 0$

$$\text{Or nous avons montré que } \int_{0^-}^{+\infty} \frac{dg(t)}{dt} \cdot e^{-p.t} .dt = p.L[g(t)] - g(0^-) = p.L[g(t)]. \text{ Donc :}$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-p.t} .dt = F(p) = p.L[g(t)] \text{ et enfin : } L\left[\int_{0^-}^t f(u).du\right] = \frac{F(p)}{p}$$

6. Théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0^+} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p.F(p))$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p.F(p))$

Du théorème de la valeur initiale on peut aussi en déduire la pente à l'origine :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p^2.F(p))$$

Démo : $\lim_{t \rightarrow 0^+} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p.L[f'(t)])$ et dans les conditions d'Heaviside : $L[f'(t)] = p.F(p)$

Démonstrations : Les démonstrations des théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale sont compliquées, vous pourrez les trouver ici :

https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Laplace#Valeur_initiale

https://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_de_Laplace#Valeur_finale

2.3.3) Fonction de transfert (transmittance) d'un système linéaire

Ci-dessous, l'équation différentielle générale à laquelle répondent les SLCI (voir chapitre précédent), reliant la grandeur d'entrée $e(t)$ à la sortie $s(t)$ du système :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot e(t) \quad \text{avec } n \geq m$$

On peut calculer la transformation de Laplace des membres de gauche et de droite, qui, grâce à la linéarité de la transformation de Laplace, nous permet d'écrire :

$$a_n \cdot L\left[\frac{d^n s(t)}{dt^n}\right] + a_{n-1} \cdot L\left[\frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}}\right] + \dots + a_0 \cdot L[s(t)] = b_m \cdot L\left[\frac{d^m e(t)}{dt^m}\right] + b_{m-1} \cdot L\left[\frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}}\right] + \dots + b_0 \cdot L[e(t)]$$

Par application du théorème de dérivation (en conditions d'Heaviside), on a :

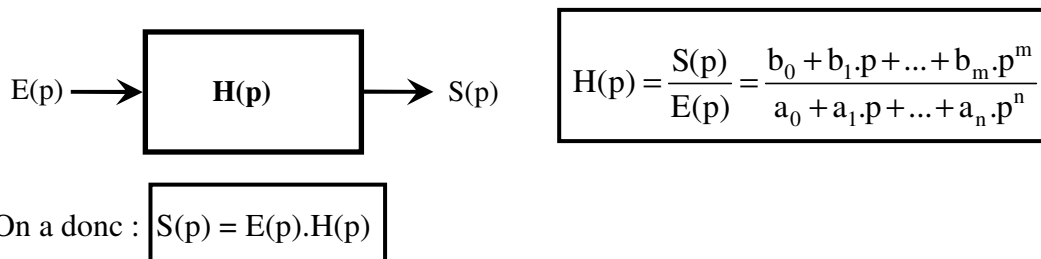
$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot S(p) + \dots + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot E(p) + \dots + b_0 \cdot E(p)$$

Soit, en factorisant : $S(p) \cdot [a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n] = E(p) \cdot [b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]$

Enfin :
$$S(p) = E(p) \cdot \frac{[b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]}{[a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n]}$$

La sortie $S(p)$ est le produit de l'entrée $E(p)$ par une **fraction rationnelle** (rapport de deux polynômes) en p (la variable de Laplace) et de coefficients a_i et b_k . Cette forme est beaucoup plus aisée à manipuler qu'une équation différentielle.

Cette fraction rationnelle, qui exprime le rapport de la sortie sur l'entrée (dans l'espace de Laplace), est appelée **fonction de transfert** ou **transmittance**. On la note en général **$H(p)$** .



La **forme canonique** de la fonction de transfert est :

$$H(p) = K \cdot \frac{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}{p^\alpha (1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n)}$$

avec : n : **ordre** du système = $\alpha + n'$: degré du dénominateur ;
 α : **classe** du système ;
 K : **gain statique** du système.

Les **zéros** d'une fonction de transfert sont les racines du numérateur (de la forme canonique) ;

Les **pôles** d'une fonction de transfert sont les racines du dénominateur (de la forme canonique).

Méthode pour obtenir la forme canonique :

- 1) Mettre $H(p)$ sous forme d'une fraction polynomiale (un numérateur et un dénominateur polynômes en p) ($\Rightarrow$ on obtient l'ordre de la FT) ;
- 2) Factoriser éventuellement numérateur et dénominateur par un multiple de p ($\Rightarrow$ classe) ;
- 3) Identifier les termes d'ordre 0 au numérateur et au dénominateur, puis factoriser par ces termes pour faire apparaître les « 1+ » ($\Rightarrow$ gain statique).

Exemple de mise sous forme canonique : $H(p) = \frac{p + \frac{a}{p^2}}{b + \frac{c}{p} + d.p^2} \Rightarrow 1) H(p) = \frac{p^3 + a}{b.p^2 + c.p + d.p^4}$

2) $H(p) = \frac{a + p^3}{p.(c + b.p + d.p^3)}$ 3) $H(p) = \frac{a}{c} \cdot \frac{1 + p^3/a}{p.(1 + \frac{b}{c}.p + \frac{d}{c}.p^3)}$ gain statique = a/c
 classe = 1
 ordre = 4

Exemple d'un moteur à courant continu (MCC)

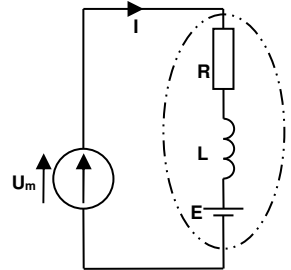
Les équations d'un moteur à courant continu classique sont données ci-après :

Equation électrique : $u_m(t) = R.i(t) + L.di(t)/dt + e(t)$ (1)

Equation de dynamique : $J.d\omega_m(t)/dt = C_m(t) - C_r(t)$ (2)

Relations de comportement : $C_m(t) = K_t.i(t)$ (3)

$e(t) = K_e.\omega_m(t)$ (4)



avec :

$u_m(t)$: tension aux bornes du moteur (en V)

$e(t)$: force contre-électromotrice (en V)

$i(t)$: intensité (en A)

$\omega_m(t)$: vitesse angulaire du moteur (en rad/s)

$C_m(t)$: couple moteur (en N.m)

$C_r(t)$: couple résistant (en N.m) (perturbation)

J : inertie de l'arbre moteur (en kg.m^2)

R : résistance électrique du moteur (en Ω)

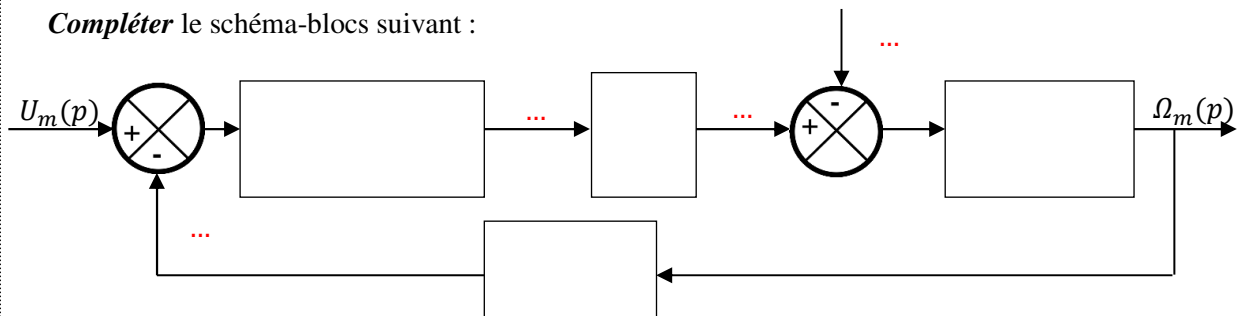
L : inductance du moteur (en H)

K_e : constante de la f.c.e.m (V.s.rad^{-1})

K_t : constante de couple (N.m.A^{-1})

Transformer les quatre équations du moteur dans le domaine de Laplace :

Compléter le schéma-blocs suivant :



On considère aucune perturbation : $C_r(p) = 0$.

Déterminer alors la fonction de transfert du moteur à partir des équations : $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

La mettre sous forme canonique, et en déduire son ordre, sa classe et son gain statique.

2.3.4) Transformée de Laplace de fonctions usuelles

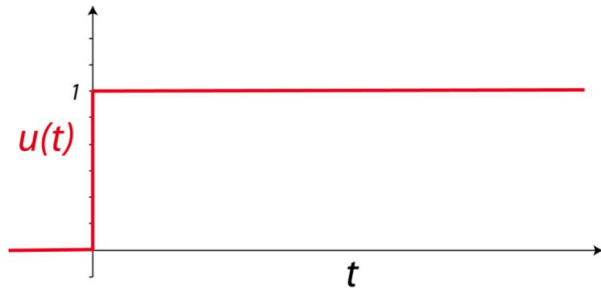
Pour toutes les transformées ci-après les démonstrations sont données, mais ne sont pas à connaître. Les transformées usuelles (à connaître sur le bout des doigts !!!) sont récapitulées en annexe A1.

1. Échelon unitaire

Soit $u(t)$ l'échelon unitaire défini par :

$$u(t) = 1 \quad \forall t \geq 0 ; \quad u(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

$$L[u(t)] = \frac{1}{p}$$



Remarque importante : cette fonction est également appelée **fonction d'Heaviside**. Pour rendre causale une fonction quelconque, on la multiplie par $u(t)$. Exemple : « sinus causal » : $\sin(t).u(t)$.

Les théorèmes précédemment étudiés ne s'appliquent que pour des fonctions causales. Si f n'est pas causale, il suffit de la multiplier par $u(t)$. Par exemple le théorème du retard s'écrit alors :

$$L[f(t - \tau).u(t - \tau)] = e^{-\tau.p}.F(p) \quad \text{avec } F(p) = L[f(t).u(t)]$$

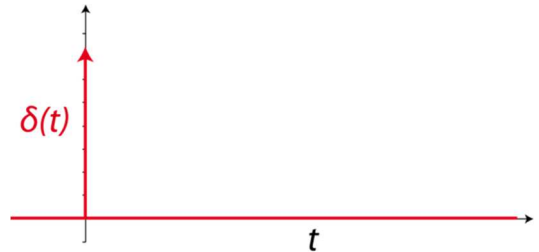
$$\text{Démonstration : } L[u(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-p.t}.dt = \left[\frac{-1}{p} e^{-p.t} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

2. Impulsion de Dirac (unitaire)

On définit la fonction Dirac $\delta(t)$ par :

$$\delta(0) = +\infty ; \quad \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 ;$$

$$\text{et : } \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$$



La représentation d'un Dirac est une flèche verticale.

Il modélise une « impulsion d'amplitude infinie pendant une durée négligeable », par exemple : un choc mécanique, électrique, thermique...

$$L[\delta(t)] = 1$$

Démonstration : On peut calculer $L[\delta(t)]$ en dérivant l'échelon unitaire, ou bien en calculant la limite quand $t_1 \rightarrow 0$ d'un créneau de durée t_1 d'amplitude $A=1$. Alors :

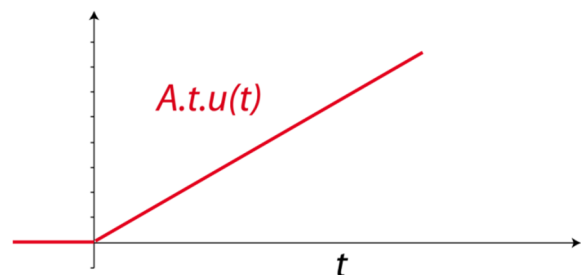
$$L[\delta(t)] = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \int_0^{t_1} \frac{1}{t_1} e^{-p.t}.dt = \lim_{t_1 \rightarrow 0} \left[\frac{1 - e^{-p.t}}{p.t_1} \right] = 1$$

3. Rampe

On définit la fonction rampe par :

$$f(t) = A.t.u(t)$$

$$L[A.t.u(t)] = \frac{A}{p^2}$$



$$\text{Démonstration : } I_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n . e^{-p.t}.dt = \frac{n}{p} . I_{n-1}(p) \quad (\text{par parties}), \text{ soit : } I_n(p) = \frac{n!}{p^n} . I_0(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Exemple d'un moteur à courant continu (MCC)

Soit le MCC non perturbé dont la fonction de transfert simplifiée est $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p}$.

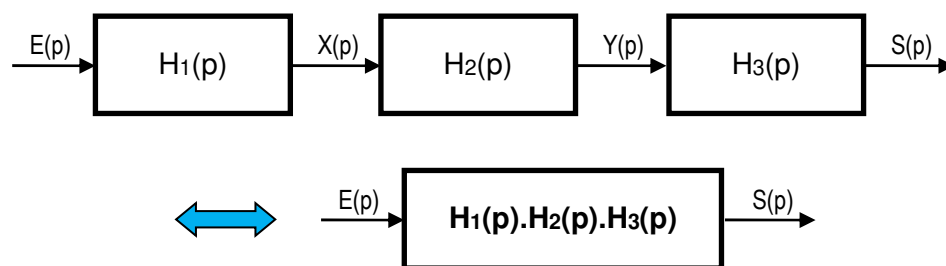
Donner la *valeur initiale*, la *pente à l'origine* et la *valeur en régime permanent* du MCC soumis à un échelon de tension $U_0 = 20V$.

2.4) Manipulation des schémas-blocs et des fonctions de transfert

2.4.1) Manipulations de base

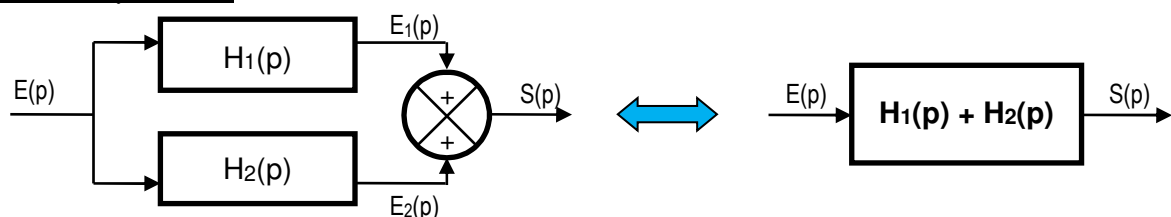
Il sera souvent préférable de ne pas manipuler un schéma-blocs complexe, et de préférer la méthode directe (par écriture de ce que vaut la sortie) dans ce cas-là - cf. exemple du paragraphe 3.4.4.

• Blocs en série



Dans le cas de blocs en série, on a : $S(p) = H_3(p).Y(p) = H_3(p).H_2(p).X(p) = H_3(p).H_2(p).H_1(p).E(p)$
La transmittance globale de la chaîne est le **produit des transmittances** de chacun des blocs.

• Blocs en parallèle

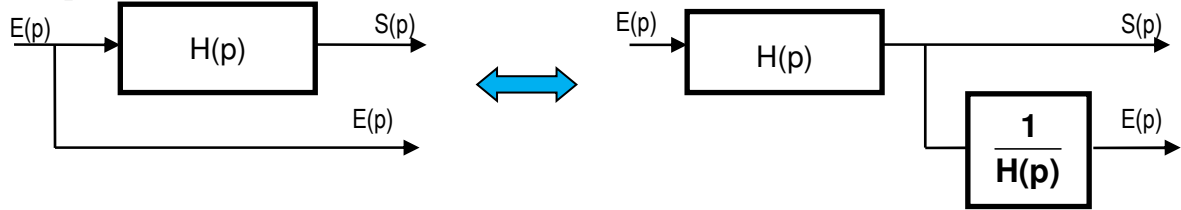


On a : $S(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).E(p) = (H_1(p) + H_2(p)).E(p)$

On peut donc remplacer ces deux blocs et le sommateur par un seul bloc dont la fonction de transfert est la **somme** de $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

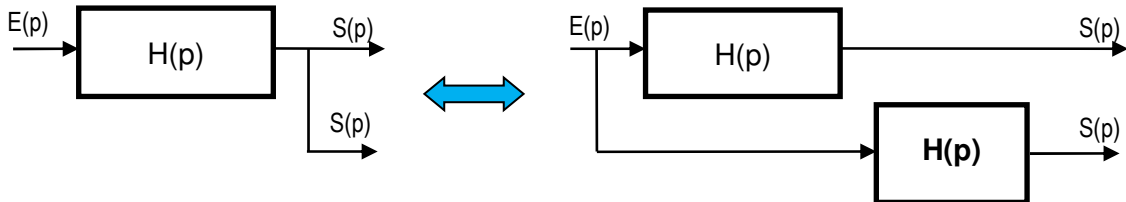
• Déplacement d'un point de prélèvement avec un bloc

✓ Déplacement vers la droite :



Comme : $E(p) = S(p)/H(p)$, lors du déplacement vers la droite d'un point de prélèvement (par-dessus un bloc H), il faut rajouter après le point un bloc de fonction de transfert $H'(p) = 1/H(p)$.

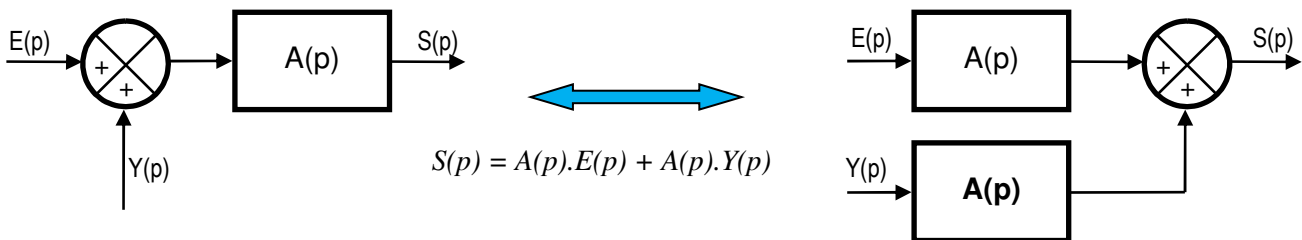
✓ Déplacement vers la gauche :



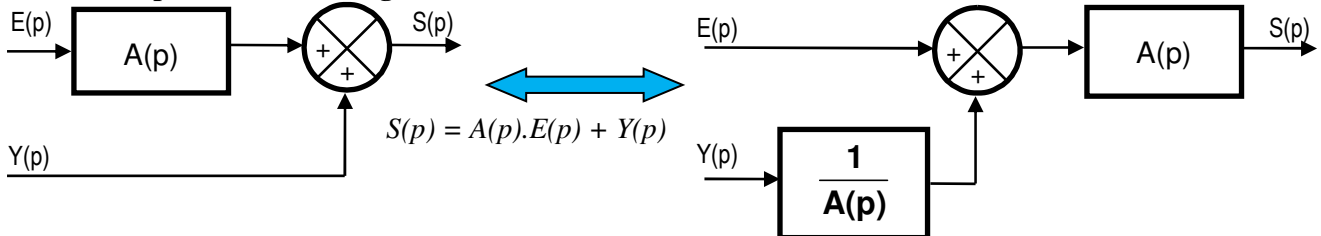
Comme : $S(p) = H(p)E(p)$, lors du déplacement vers la gauche d'un point de prélèvement (par-dessus un bloc $H(p)$), il faut rajouter après le prélèvement un bloc de fonction de transfert $H(p)$.

• Déplacement d'un comparateur avec un bloc

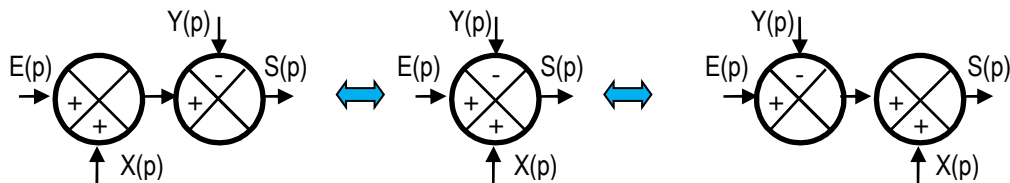
✓ Déplacement vers la droite :



✓ Déplacement vers la gauche :



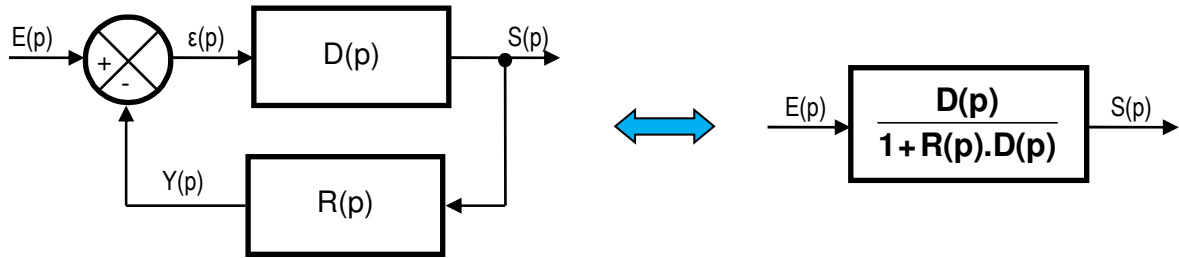
• Comparateurs en série : On peut regrouper ou inverser 2 comparateurs en série.



• Impossibilité de déplacer un point de prélèvement par rapport à un comparateur

2.4.2) Fonction de Transfert en Boucle Ouverte et en Boucle Fermée

Les systèmes asservis sont par définition bouclés. Le modèle de base d'une boucle est le suivant :



On a : $Y(p) = R(p).S(p)$; $\varepsilon(p) = E(p) - Y(p)$; $S(p) = D(p). \varepsilon(p)$

Soit $S(p) = D(p).(E(p) - R(p).S(p))$

Donc : $S(p).(1 + R(p).D(p)) = D(p).E(p)$

Soit enfin : $S(p) = \frac{D(p)}{1 + R(p).D(p)}.E(p)$

Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) :

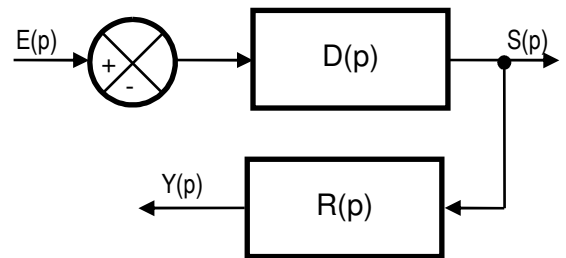
La fonction de transfert équivalente de la boucle : $\text{FTBF}(p) = \frac{D(p)}{1 + R(p).D(p)}$

Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) :

La FTBO Correspond au bout de la chaîne si on ouvre le schéma au niveau du comparateur.

La FTBO est égale au produit des fonctions de transfert de chaque bloc de la boucle : $\text{FTBO}(p) = D(p).R(p)$

La FTBO est utilisée pour déterminer les conditions de stabilité et de précision d'un système asservi (cours de 2ème année).



Fonction de transfert de la boucle de retour (R) : R(p)

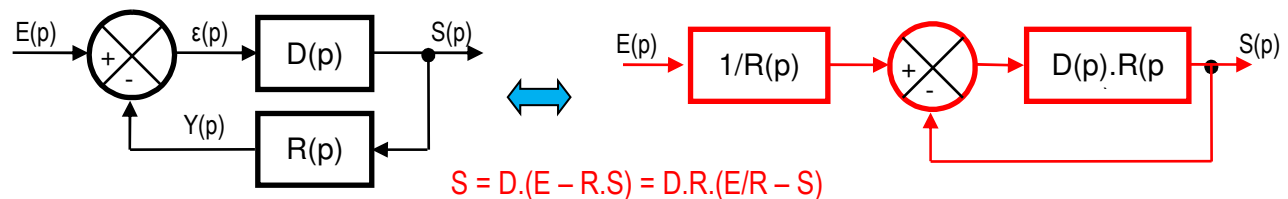
Fonction de transfert de la chaîne directe : D(p) (c'est la fonction de transfert, sans la boucle de retour)

On a donc au final : $\text{FTBF}(p) = \frac{\text{Chaîne directe}}{1 + \text{FTBO}(p)}$ *c'est la « formule de Black »*

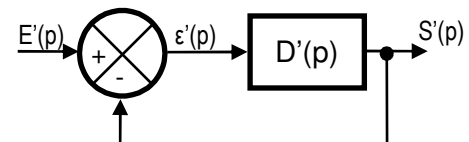
• Cas particulier du retour unitaire :

Le système est à retour unitaire si la fonction de transfert de la boucle de retour vaut 1. On peut, dans ce cas, comparer directement les valeurs d'entrée et de sortie (même grandeur physique).

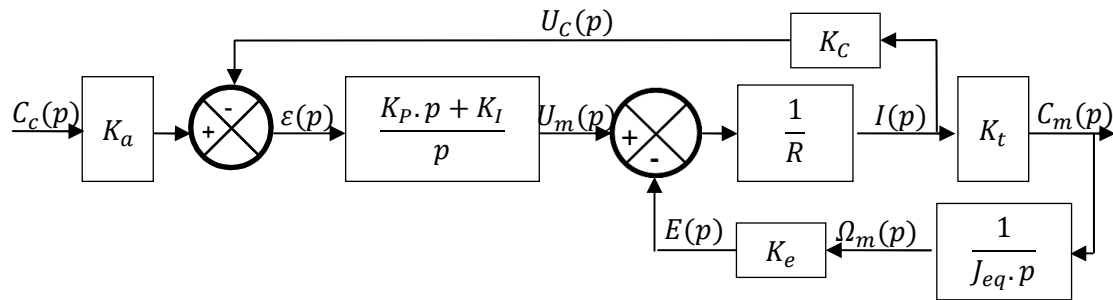
Toute boucle peut se ramener à une boucle unitaire :



Dans une boucle à retour unitaire, on a : $\text{FTBF}(p) = \frac{D'(p)}{1 + D'(p)}$

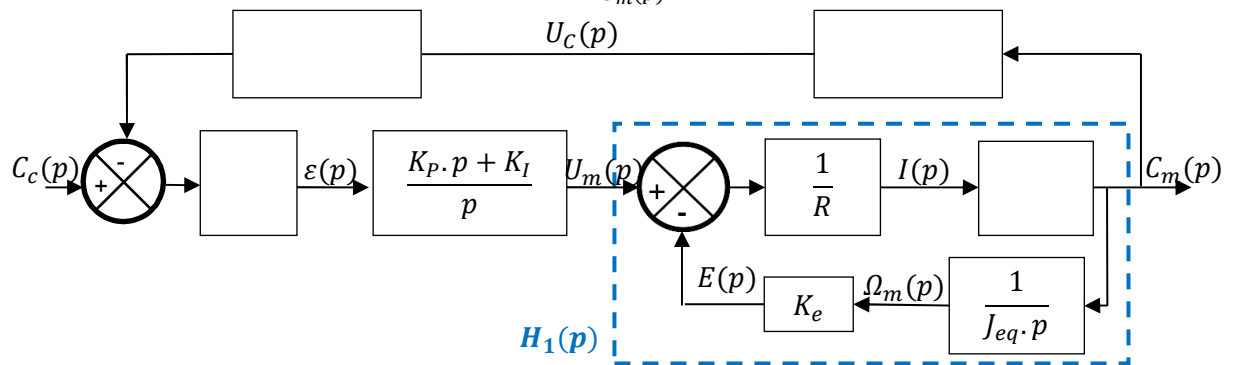


Exemple d'un moteur à courant continu (MCC) asservi en couple dont le schéma-blocs est :



Déterminer les quatre fonctions de transfert manquantes ci-dessous.

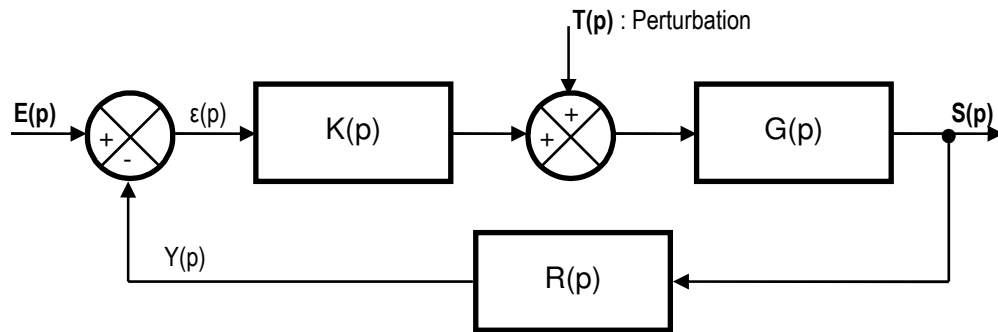
Puis en déduire la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{C_m(p)}{U_m(p)}$ (sous forme de fraction polynomiale).



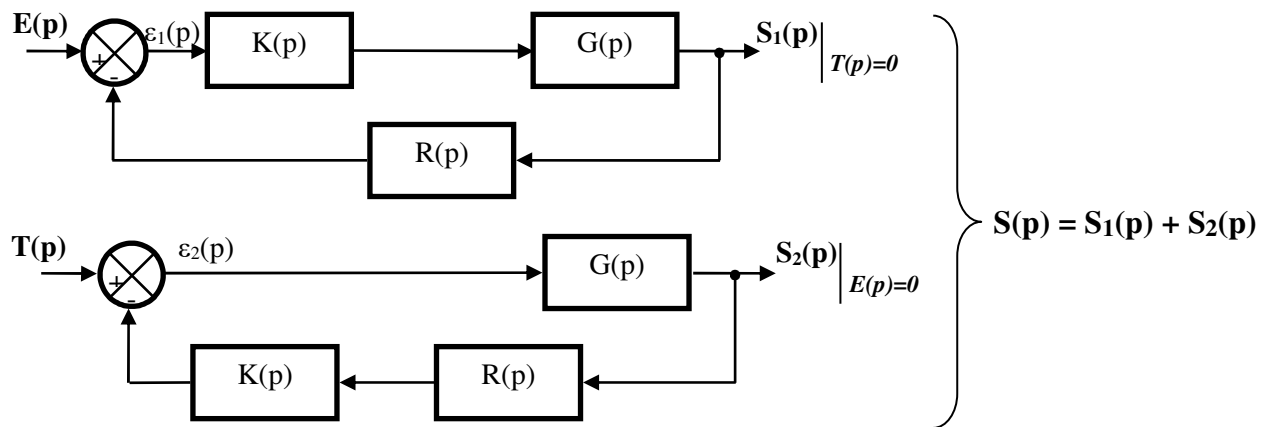
2.4.3) Systèmes multi-variables (multi-entrées) : SUPERPOSITION

De manière générale, dans un système réel, plusieurs entrées aboutissent à une sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'**entrée principale** (grandeur par rapport à laquelle on détermine la sortie) mais aussi des entrées supplémentaires très souvent parasites (bruit, effort résistant,...) appelées **perturbations**.

Le schéma bloc générique d'un tel système est le suivant :



Pour déterminer la fonction de transfert, on utilise le **principe de superposition** des SLCI. Le schéma est alors équivalent à la superposition des deux schémas suivants. L'un pour lequel $T(p)=0$, et l'autre en prenant $E(p)=0$. On obtient ainsi deux sorties $S_1(p)$ et $S_2(p)$ qu'il suffit d'additionner pour obtenir la sortie générale, $S(p)$.



$$S(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Big|_{T(p)=0} \cdot E(p) + \frac{S(p)}{T(p)} \Big|_{E(p)=0} \cdot T(p)$$

$$\text{Soit ici : } S(p) = \frac{K(p) \cdot G(p)}{1 + R(p) \cdot K(p) \cdot G(p)} \cdot E(p) + \frac{G(p)}{1 + R(p) \cdot K(p) \cdot G(p)} \cdot T(p)$$

On aurait pu retrouver ce résultat en écrivant $S(p)$ dans le schéma complet :

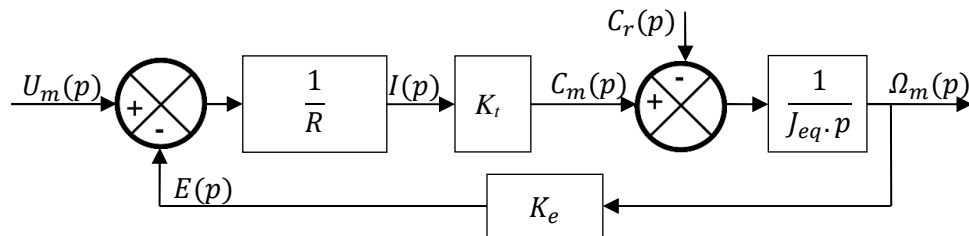
$$S = G \cdot [T + K \cdot (E - R \cdot S)]$$

$$S = G \cdot T + G \cdot K \cdot E - G \cdot K \cdot R \cdot S$$

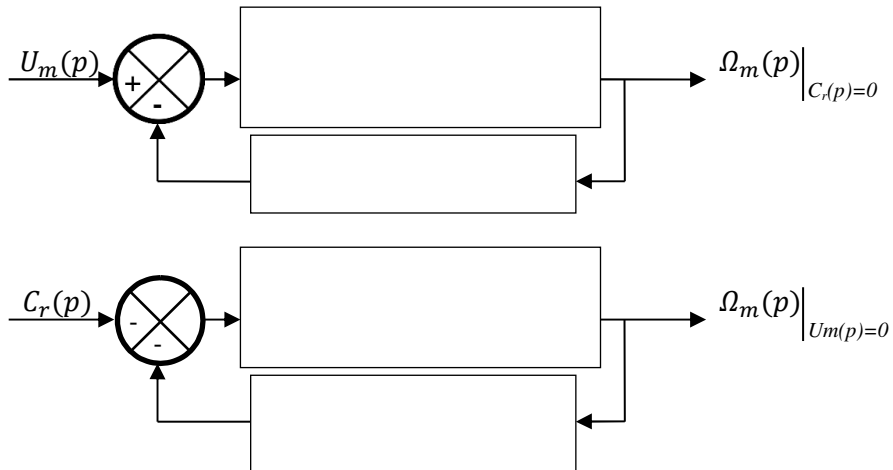
$$S \cdot (1 + G \cdot K \cdot R) = G \cdot T + G \cdot K \cdot E$$

$$\text{Au final : } S(p) = \frac{K(p) \cdot G(p)}{1 + R(p) \cdot K(p) \cdot G(p)} \cdot E(p) + \frac{G(p)}{1 + R(p) \cdot K(p) \cdot G(p)} \cdot T(p)$$

Exemple d'un moteur à courant continu (MCC) perturbé dont le schéma-blocs est :



Compléter les fonctions de transfert manquantes dans les deux schémas-blocs ci-dessous :



Déterminer alors $H_1(p)$ et $H_2(p)$ telles que $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot U_m(p) + H_2(p) \cdot C_r(p)$

3) ANALYSE TEMPORELLE DE SLCI PARTICULIERS

L'analyse temporelle consiste à **étudier la réponse des systèmes à des entrées « tests »** (ou entrées-type). Des signaux élémentaires sont envoyés en entrée et la sortie est étudiée, afin de caractériser au mieux le comportement de ces systèmes en fonction du temps. Cette démarche permet d'effectuer une **modélisation comportementale** du système considéré.

Les entrées-types les plus classiques (déjà étudiées précédemment) sont :

- **Impulsion de Dirac** $\delta(t)$; $L[\delta(t)] = 1$. La réponse à une impulsion est la « **réponse impulsionnelle** ».
- **Echelon** $E_0.u(t)$; $L[u(t)] = \frac{E_0}{p}$. La réponse à un échelon est la « **réponse indicielle** ».
- **Rampe** $A.t.u(t)$; $L[A.t.u(t)] = \frac{A}{p^2}$.
- **Sinusoïde (harmonique)** $e_0.\sin(\omega.t).u(t)$. La réponse à une sinusoïde est très particulière, et est étudiée dans le chapitre « étude harmonique ».

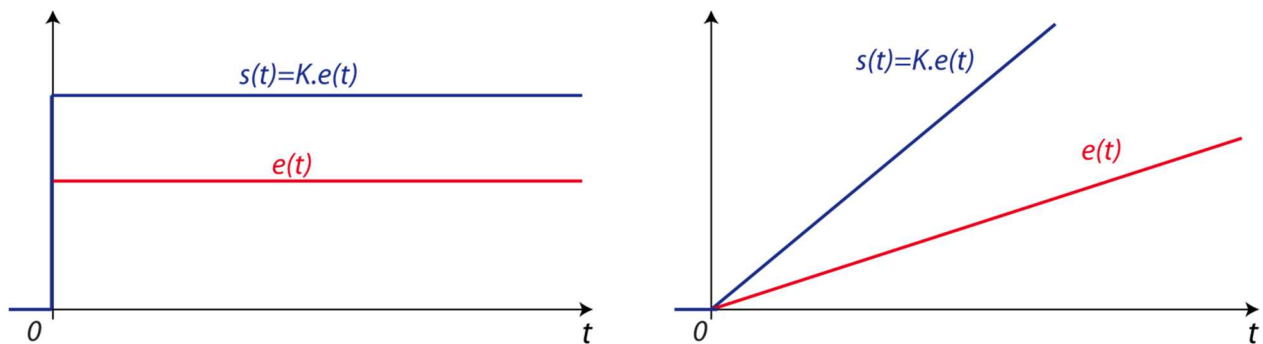
3.1) Système à action proportionnelle (gain pur)

La sortie est proportionnelle à l'entrée. $s(t) = K.e(t) \xrightarrow{L} S(p) = K.E(p) \Rightarrow H(p) = K$

Exemples : résistance ; capteur (en 1^{ère} approximation) ; réducteur ...

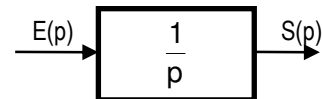


Les réponses d'un tel système à un échelon et à une rampe sont donc :



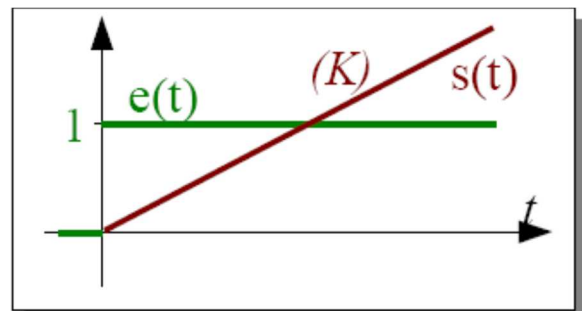
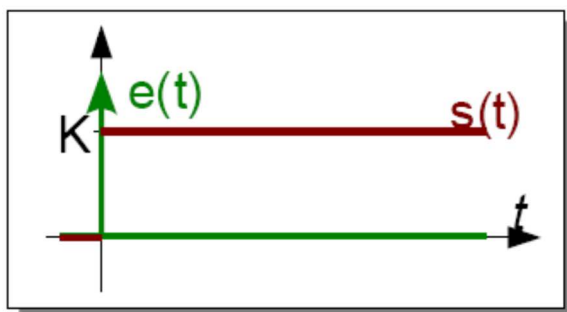
3.2) Système intégrateur

$\frac{ds(t)}{dt} = e(t) \xrightarrow{L} p.S(p) = E(p) \Rightarrow H(p) = \frac{1}{p}$



Exemples : passage d'une vitesse à un déplacement ; passage d'un débit à un volume ...

Les réponses impulsionnelle (impulsion de Dirac) et indicielle (échelon) d'un tel système sont donc :



3.3) Système du 1^{er} ordre

Rappel : un système du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre, que l'on peut écrire sous la forme suivante : $\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$

Par transformée de Laplace, cette équation donne : $\tau \cdot p \cdot S(p) + S(p) = K \cdot E(p)$, soit une fonction de transfert canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

Les deux caractéristiques d'un système du 1^{er} ordre sont :

τ : constante de temps (unité : seconde)

K : gain statique (unité : [s] / [e])

L'unique pôle de la fonction de transfert est un réel qui vaut : $p_1 = -\frac{1}{\tau}$

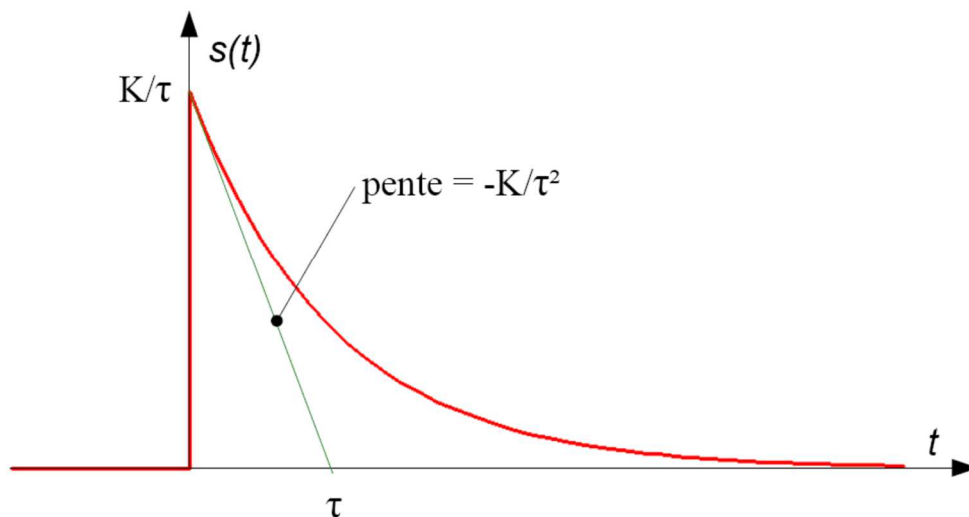
Exemples de système du 1^{er} ordre : Circuit électrique RL, Moteur électrique en 1^{ère} approximation, Capteur analogique ...

3.3.1) Réponse impulsionnelle d'un 1^{er} ordre (connaître juste l'allure)

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

La réponse temporelle vaut donc, par transformation inverse de Laplace : $s(t) = \frac{K}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \cdot u(t)$

• Tracé de la réponse impulsionnelle d'un 1^{er} ordre :



• Caractéristiques de la réponse :

- ✓ **Discontinuité** en $t=0$: $s(0^-) = 0$ et $s(0^+) = K/\tau$ ($= \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot S(p)$)
- ✓ $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0^+$ ($= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot S(p)$) ; La réponse comporte une **asymptote horizontale** : $y(t) = 0$.
- ✓ Tangente de pente $-\frac{K}{\tau^2}$ en 0^+ , coupant l'axe des abscisses en $t = \tau$

Démo par le théorème de la valeur initiale de la dérivée :

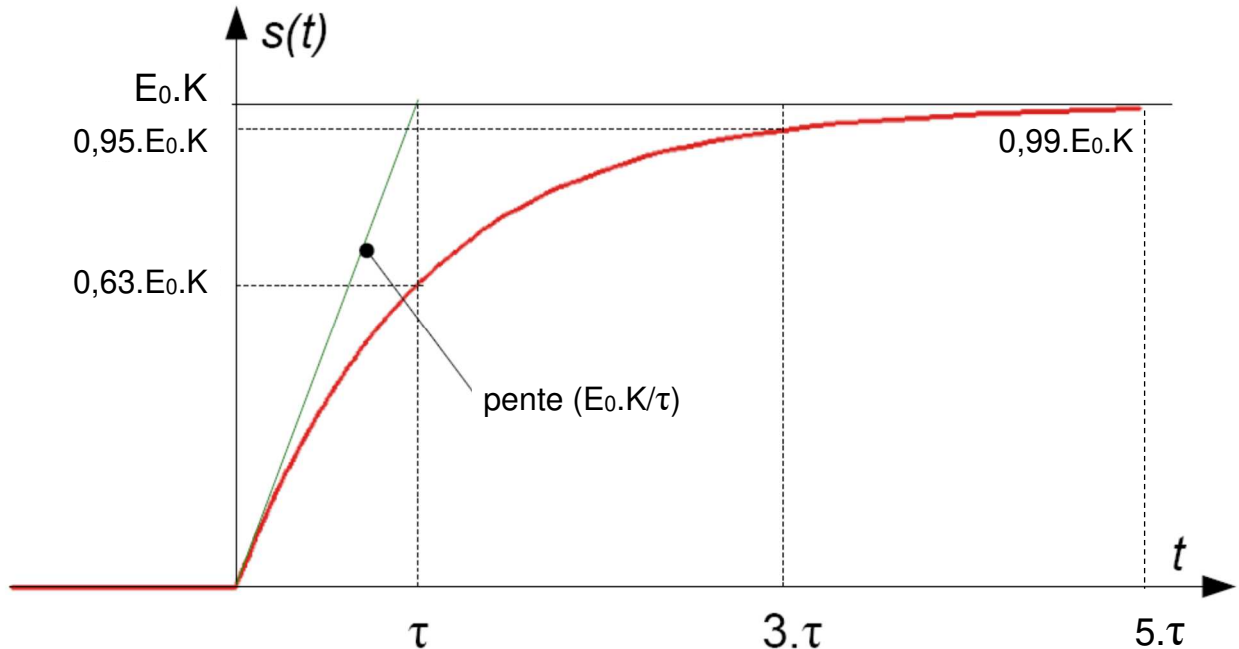
$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left[p \cdot (p \cdot S(p) - f(0^+)) \right] = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{K \cdot p^2}{1 + \tau \cdot p} - \frac{K \cdot p}{\tau} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{K \cdot \tau \cdot p^2 - K \cdot (1 + \tau \cdot p) \cdot p}{\tau \cdot (1 + \tau \cdot p)} \right) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{-K \cdot p}{\tau \cdot (1 + \tau \cdot p)} \right) = -\frac{K}{\tau^2}$$

3.3.2) Réponse indicielle (échelon) d'un 1^{er} ordre (à savoir tracer)

Soit une entrée en échelon de valeur E_0 (constante réelle) : $e(t) = E_0.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p}$

$$\Rightarrow S(p) = H(p).E(p) = \frac{E_0.K}{p.(1 + \tau.p)} = E_0.K. \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau.p} \right)$$

La réponse temporelle vaut donc, par transformation inverse de Laplace : $s(t) = E_0.K.(1 - e^{-t/\tau}).u(t)$



• Caractéristiques de la réponse :

- ✓ Continuité en $t=0$: $s(0) = 0$

Démo dans le domaine temporel : $s(0^+) = E_0.K.(1 - e^{-0/\tau}) = E_0.K.(1 - 1) = 0$

Démo dans le domaine de Laplace : $s(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p.E_0.K}{p.(1 + \tau.p)} = 0$

- ✓ $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = E_0.K$ ($= \lim_{p \rightarrow 0} p.S(p)$) ; La réponse comporte une asymptote horizontale : $y(t) = E_0.K$.

- ✓ Tangente de pente $\frac{E_0.K}{\tau}$ en 0^+ , coupant l'asymptote finale en $t = \tau$

Démo temporelle : $s'(t) = \frac{E_0.K}{\tau}.e^{-t/\tau}.u(t)$ donc $s'(0^+) = \frac{E_0.K}{\tau}$

Démo dans Laplace : $s'(0^+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.p.S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2.S(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p.E_0.K}{(1 + \tau.p)} = \frac{E_0.K}{\tau}$

- ✓ En $t = \tau$, $s(\tau) = E_0.K.(1 - e^{-1}) \approx 0,63.E_0.K = 0,63.s(+\infty)$
- ✓ En $t = 3.\tau$, $s(3\tau) = E_0.K.(1 - e^{-3}) \approx 0,95.E_0.K = 0,95.s(+\infty)$
- ✓ En $t = 5.\tau$, $s(5\tau) = E_0.K.(1 - e^{-5}) \approx 0,99.E_0.K = 0,99.s(+\infty)$
- ✓ Pour un système du 1^{er} ordre, le temps de réponse à 5% est : $t_{R5\%} \approx 3\tau$

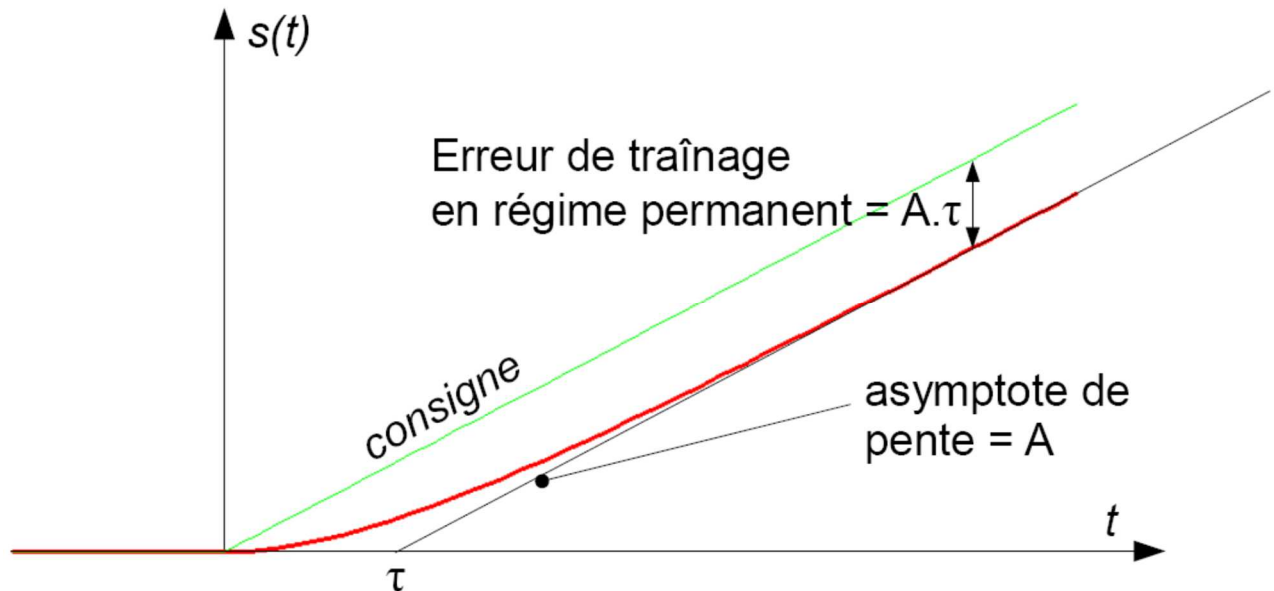
À partir du tracé de la réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre, il est facile de retrouver, par identification, le gain K et la constante de temps τ (cf. chapitre 3.5).

3.3.3) Réponse d'un 1^{er} ordre à une rampe (connaître juste l'allure)

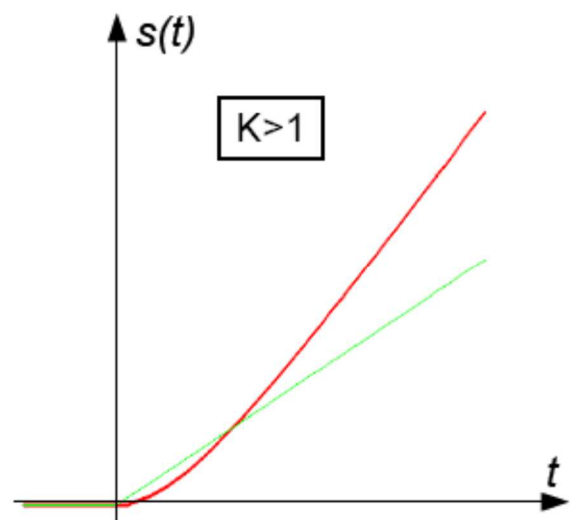
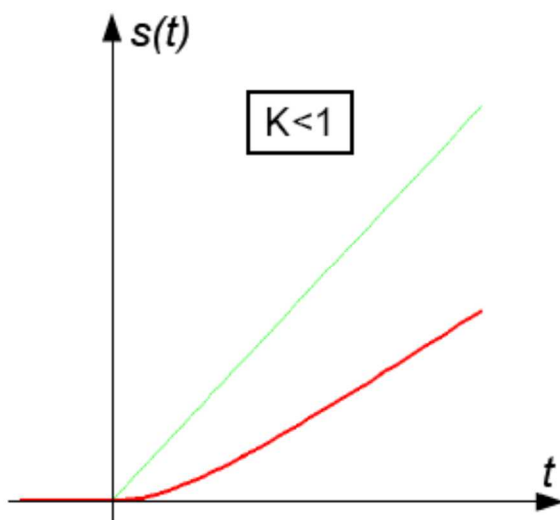
Soit une entrée en rampe de pente A : $e(t) = A.t.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{A}{p^2} \Rightarrow S(p) = \frac{A.K}{p^2.(1+\tau.p)}$

$$S(p) = A.K. \left(-\frac{\tau}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{\tau^2}{1+\tau.p} \right). \text{ La réponse temporelle vaut : } s(t) = A.K. (t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}).u(t)$$

- Tracé de la réponse pour $K=1$:



- Autres cas ($K \neq 1$) :



- Caractéristiques de la réponse :

- ✓ En $t = 0^+$: $s(0) = 0$ et tangente horizontale $s'(0) = 0$
- ✓ $\lim_{t \rightarrow \infty} s'(t) = A.K$: La réponse comporte une **asymptote oblique** de pente $A.K$.
- ✓ Dans le cas où $K=1$: $\lim_{t \rightarrow \infty} [e(t) - s(t)] = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{A}{p} - \frac{A}{p.(1+\tau.p)} \right) = \lim_{p \rightarrow 0} \left(\frac{-A.\tau.p}{p.(1+\tau.p)} \right) = -A.\tau$;

La réponse comporte une **erreur de trainage en régime permanent**.

- ✓ Dans les cas où $K \neq 1$, on généralise la notion d'**erreur de trainage** en comparant la sortie à la droite affine $A.K.t$. Cette erreur de trainage vaut alors $A.K.\tau$.

3.4) Système du 2^e ordre

Rappel : un système du deuxième ordre est caractérisé par une équation différentielle du deuxième ordre, que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot s(t) = K\omega_0^2 \cdot e(t)$$

Par transformée de Laplace, cette équation donne : $p^2 \cdot S(p) + 2\xi\omega_0 \cdot p \cdot S(p) + \omega_0^2 \cdot S(p) = K\omega_0^2 \cdot E(p)$, soit une fonction de transfert canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Les trois caractéristiques d'un système du 2^e ordre sont :

ω_0 : pulsation propre non amortie, ou « naturelle » (unité : rad.s⁻¹)

ξ : (« xi ») coefficient d'amortissement (sans unité). On emploie aussi les notations z ou m .

K : gain statique (unité : [s] / [e]).

Les pôles (racines du dénominateur de $H(p)$) de la fonction de transfert sont les solutions de

$$D(p) = 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \omega_0^2 + 2\xi\omega_0 \cdot p + p^2 = 0$$

$D(p)$ est un polynôme de degré 2, dont le discriminant vaut : $\Delta = 4\xi^2 \cdot \omega_0^2 - 4 \cdot \omega_0^2 = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot (\xi^2 - 1)$

Les pôles de $H(p)$ sont donc : $p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$

En fonction des valeurs de ξ les pôles seront réels (si $\xi \geq 1$) ou complexes (si $\xi < 1$).

Exemples de système du 2^e ordre : système masse ressort amortisseur, circuit électrique RLC, moteur électrique asservi en position, ...

3.4.1) Réponse impulsionnelle d'un 2^e ordre (connaître juste l'allure)

La réponse du système dépend des valeurs de ξ , dont dépendront la nature des pôles de $H(p)$.

• $\xi \geq 1$ (système amorti)

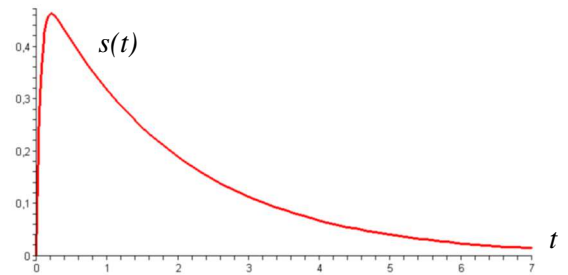
$H(p)$ admet 2 pôles réels.

Il s'agit d'un régime amorti (apériodique, non-oscillant).

$$\text{Démonstration : } E(p) = 1 \Rightarrow S(p) = \frac{K\omega_0^2}{\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 \cdot p + p^2}$$

$$S(p) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left[\frac{1}{(p - p_1)} - \frac{1}{(p - p_2)} \right] \text{ avec } p_1 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \text{ et } p_2 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$\text{Et donc par transformation inverse de Laplace : } s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot (e^{p_1 \cdot t} - e^{p_2 \cdot t}) \cdot u(t)$$



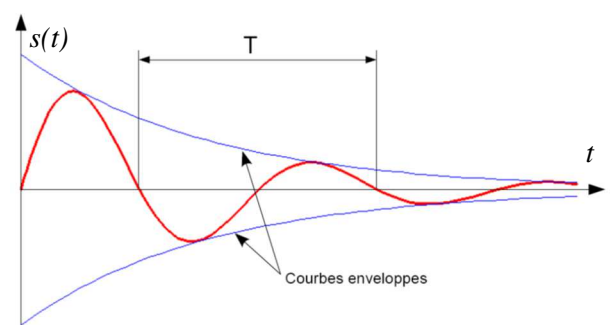
• $\xi < 1$ (système sous-amorti)

$H(p)$ admet deux pôles complexes conjugués.

Le système est sous-amorti (périodique, oscillant).

$$\text{Démonstration : } S(p) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$$

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi\omega_0 \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t) \cdot u(t)$$



3.4.2) Réponse indicielle (échelon) d'un 2^e ordre (à savoir tracer)

$$e(t) = E_0.u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{E_0}{p} \Rightarrow S(p) = H(p).E(p) = \frac{E_0.K}{p \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

La réponse du système dépend alors des valeurs de ξ , dont dépendront les pôles de $H(p)$ et donc de $S(p)$.

• $\xi \geq 1$ (système amorti)

$H(p)$ admet 2 pôles réels.

Par analogie avec le 1^{er} ordre, on notera : $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$

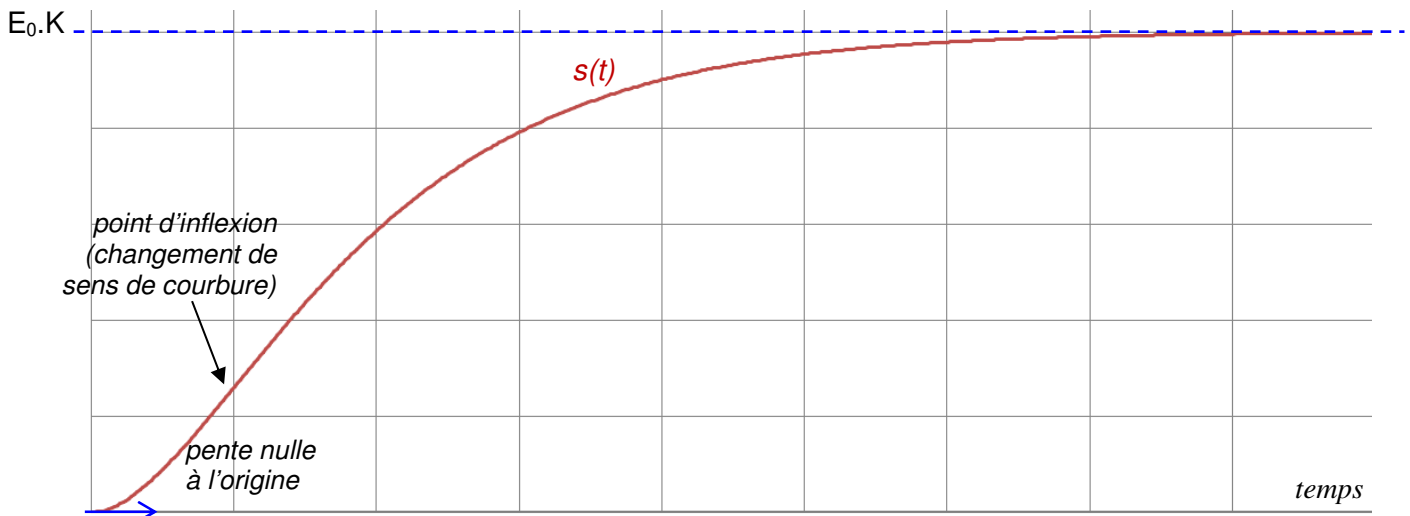
Ainsi, la fonction de transfert devient : $H(p) = \frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1).(p-p_2)} = \frac{K}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}$

Elle est équivalente à deux 1^{er} ordres en série.

Pour trouver τ_1 et τ_2 on procède par identification : $\tau_1 + \tau_2 = \frac{2\xi}{\omega_0}$ et $\tau_1.\tau_2 = \frac{1}{\omega_0^2}$

$$\text{On a : } S(p) = \frac{E_0.K}{p.(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)} = E_0.K \left[\frac{1}{p} + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \left(\frac{\tau_1^2}{(1+\tau_1.p)} - \frac{\tau_2^2}{(1+\tau_2.p)} \right) \right]$$

La réponse temporelle est alors : $s(t) = E_0.K \left[1 + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \left(\tau_1.e^{-t/\tau_1} - \tau_2.e^{-t/\tau_2} \right) \right].u(t)$



Caractéristiques :

- ✓ En $t = 0$: tangente horizontale $s'(0) = 0$
- ✓ Asymptote horizontale en $+\infty$: $y(t) = E_0.K$
- ✓ La courbe **ne dépasse pas** son asymptote horizontale : elle est monotone.

Temps de réponse à 5% : il n'y a pas de formule, et il convient d'utiliser les abaques. On peut toutefois remarquer que le temps de réponse est approximativement $\ll 3.(\tau_1 + \tau_2) \gg$.

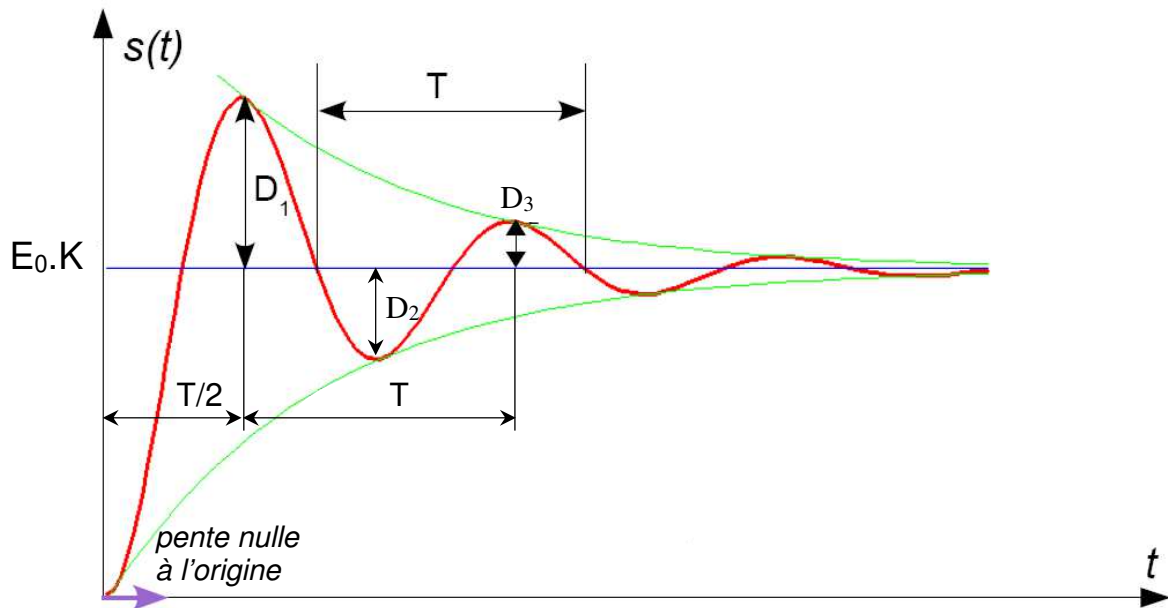
Approximation d'un 2^e ordre à un 1^{er} ordre :

Lorsque $\tau_1 \ll \tau_2$ la fonction de transfert peut être approximée à un 1^{er} ordre de constante de temps τ_2 et donc son temps de réponse est environ $3.(\tau_1 + \tau_2) \approx 3.\tau_2$.

• $\xi < 1$ (système sous-amorti)

$H(p)$ admet 2 pôles complexes conjugués.

$$s(t) = E_0.K. \left(1 - \frac{e^{-\xi.\omega_0.t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin \left[\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \right) .u(t)$$



Caractéristiques :

- ✓ En $t = 0$: $s(0^+) = 0$ (continuité) et il existe une **tangente horizontale** $s'(0) = 0$
- ✓ **Asymptote horizontale en $+\infty$** : $y(t) = E_0.K$
- ✓ On observe l'apparition d'**oscillations** autour de la valeur finale (réponse pseudopériodique), d'autant plus amorties que ξ est élevé. Pour $\xi=0$, la réponse est sinusoïdale d'amplitude $2K$.
- ✓ La pseudo-pulsation des oscillations (transitoires) est appelée **pulsation propre amortie** :

$$\omega_p = \omega_0.\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et la pseudo-période est donc : } T = \frac{2\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}$$

- ✓ Le **1^{er} dépassement** (haut d'une oscillation) est obtenu pour $t_1 = T/2$, soit : $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}}$

Démo : résoudre $s'(t) = 0$. Les dépassements de même sens sont espacés de T .

- ✓ La valeur du **1^{er} dépassement** est : $D_1 = E_0.K.e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Démo : introduire le temps de 1^{er} dépassement t_1 dans l'expression temporelle de $s(t)$

Les dépassements suivants (avec ceux négatifs) valent : $D_n = E_0.K.(-1)^{n+1}.e^{-\frac{n.\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

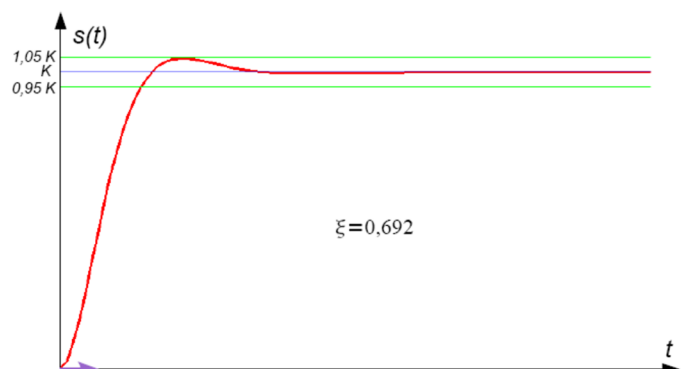
Le dépassement est souvent écrit sous sa forme relative (par rapport à la valeur finale).

$$\text{Le dépassement relatif vaut : } D_{1\%} = \frac{D_1}{s(\infty)} = e^{-\frac{\xi.\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

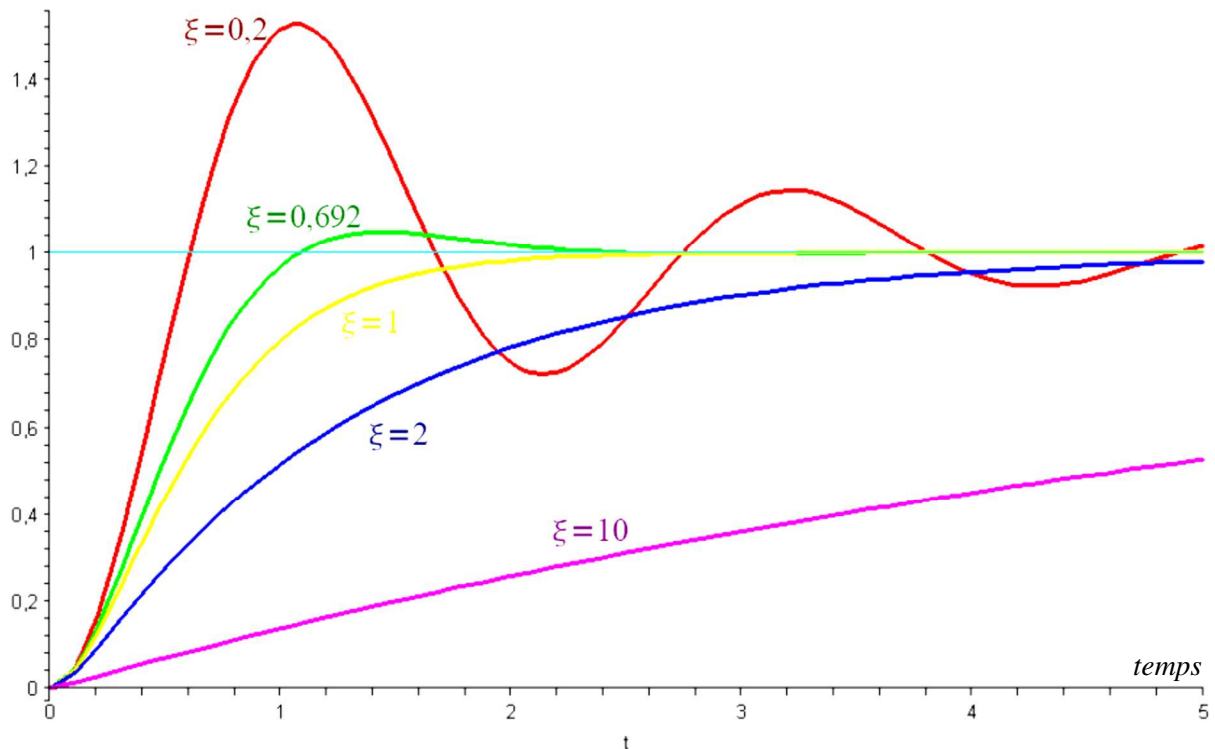
Le calcul du temps de réponse à 5% est très compliqué. On se référera donc à des abaques.

Cependant, on sait que le **temps de réponse à 5% est minimal pour $\xi \approx 0,7$** car c'est pour cette valeur que le 1^{er} dépassement vaut « $1,05.E_0.K$ » (+5% de la valeur finale).

De même, le **temps de réponse minimal sans dépassement** est donné pour $\xi = 1$.



- **Récapitulatif :** Allure des réponses indicielles d'un système du 2^e ordre, pour différentes valeurs de l'amortissement ξ (dans le cas où $E_0=1$ et $K=1$)



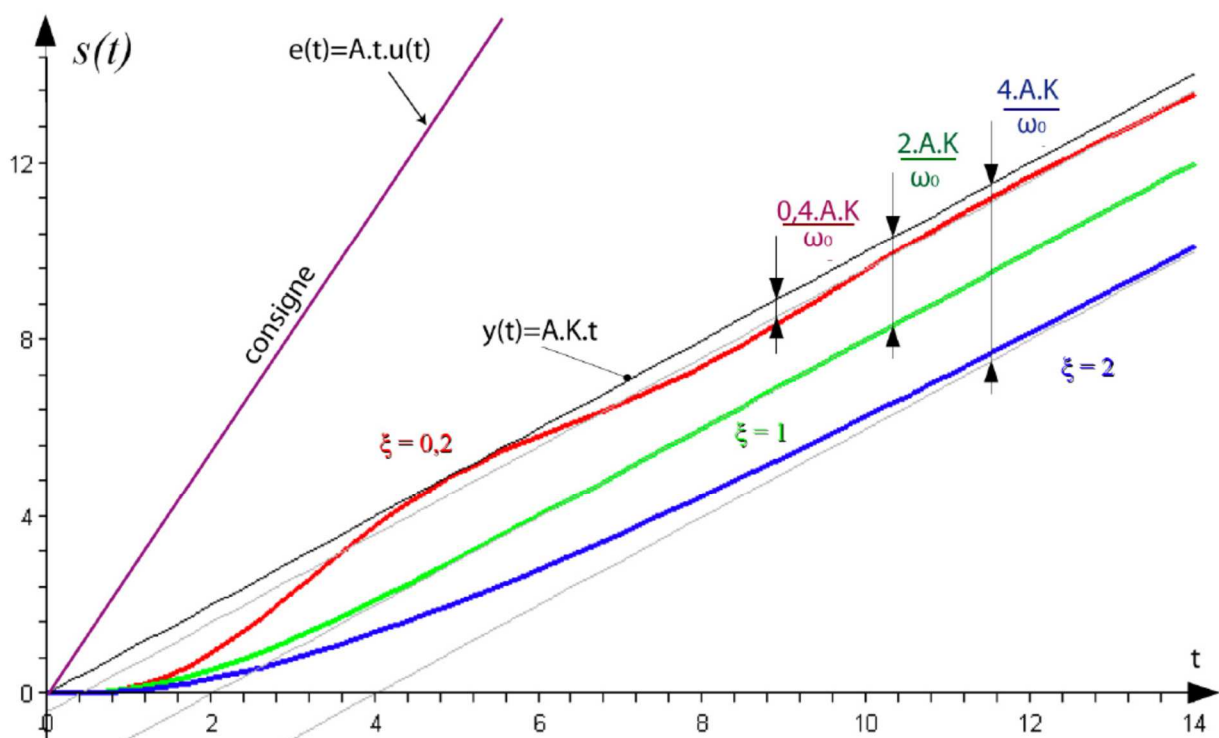
Si $\xi=0$ (il n'y a pas d'amortissement), la réponse est une sinusoïde non amortie, de pulsation ω_0 , justifiant ainsi son nom de « pulsation propre non amortie ».

3.4.3) Réponse d'un 2^e ordre à une rampe (connaître juste l'allure)

La **pente à l'infini** de la réponse vaut : $K.A$ (comme pour un 1^{er} ordre).

Donc si le gain statique est unitaire, la limite lorsque t tend vers l'infini de la réponse reste parallèle à la consigne avec un retard (qui dépend de ξ et de ω_0).

De plus, la réponse présente des **oscillations** autour de cette asymptote si $\xi < 1$.



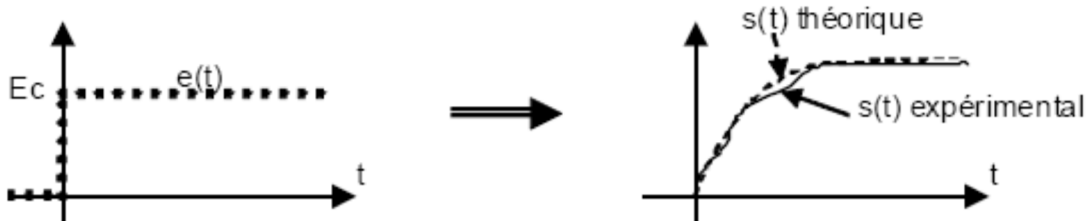
3.5) Identification temporelle à un modèle

L'étude et l'amélioration des performances des systèmes asservis nécessitent de connaître l'expression des fonctions de transfert des blocs qui constituent le système à commander. Deux voies sont possibles pour déterminer ces fonctions :

- a) **Recherche des lois physiques** liant l'entrée à la sortie du bloc. Cette solution nécessite de faire des hypothèses de modélisation souvent simplificatrices, les lois obtenues sont donc approchées. De plus, il existe des exemples où ces lois sont quasiment impossibles à déterminer précisément.

Cette voie est la seule possible lorsque le système à étudier n'existe pas, comme lors de la phase de conception.

- b) **Procéder par identification**, c'est-à-dire par mesure du comportement du système. Le système doit donc exister réellement. Cette méthode est basée essentiellement sur l'analyse de la réponse à un échelon, du système ou de l'un de ses blocs.



3.5.1) Méthode d'identification

• Choix de l'entrée

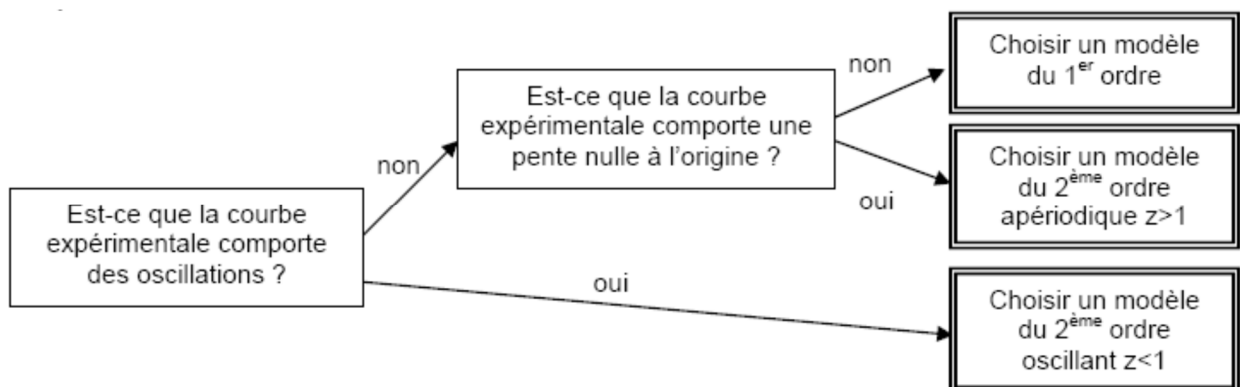
L'identification débute par une activité expérimentale de mesure du comportement d'un bloc défini.

On peut distinguer classiquement deux types d'identification :

- a) **une identification temporelle**, lorsque l'entrée est une impulsion, un échelon ou une rampe. L'essai retenu est l'**échelon** pour des raisons de réalisation pratique ; en effet l'impulsion est difficilement réalisable (voire impossible) et la rampe est souvent limitée par l'amplitude de variation possible de la sortie.
- b) **une identification fréquentielle**, que l'on rencontre plus souvent pour l'identification harmonique des signaux électriques. Dans le cas des grandeurs mécaniques, les limites en fréquence sont souvent faibles ($<$ à quelques dizaines de hertz) ; de plus ce type d'entrée peut détériorer le mécanisme à étudier.

• Choix de la nature du modèle

La nature du modèle à choisir dépend de l'allure de la sortie obtenue. Par exemple un système qui présente des dépassements ne peut se modéliser par une fonction du 1^{er} ordre. Compte tenu des limites du programme en CPGE (**1^{er} et 2^e ordre**), le nombre de cas possibles est donc très restreint, mais une recherche du type du modèle doit cependant être mise en œuvre :

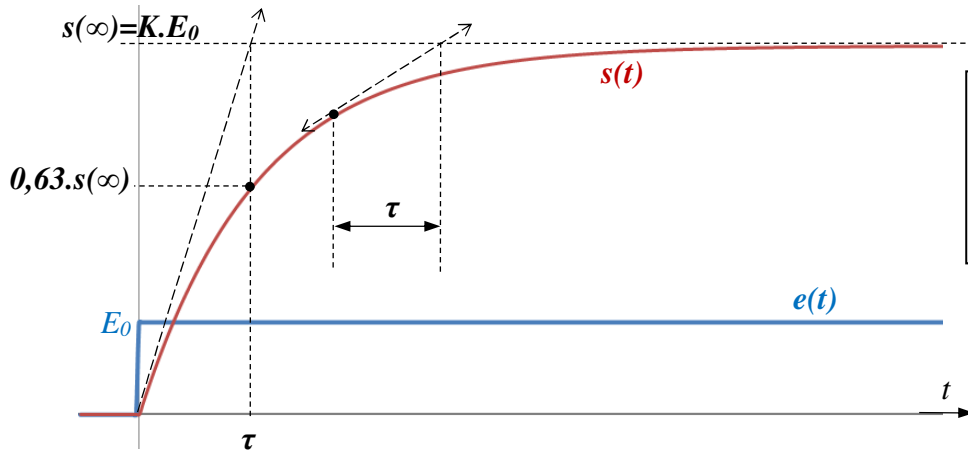


Compte tenu de la **difficulté** à déterminer la pente à l'origine sur des résultats expérimentaux, le choix entre un 1^{er} ordre ou un 2^e ordre apériodique est parfois difficile. On peut toujours modéliser une réponse voisine d'un 1^{er} ordre par un 2^e ordre, mais la réciproque est fautive.

3.5.2) Identification à un système du 1er ordre

La fonction de transfert d'un tel système est : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$ ou K et τ sont à déterminer.

L'expression mathématique de la réponse à un échelon d'amplitude E_C est : $s(t) = K.E_C.(1 - e^{-t/\tau})$



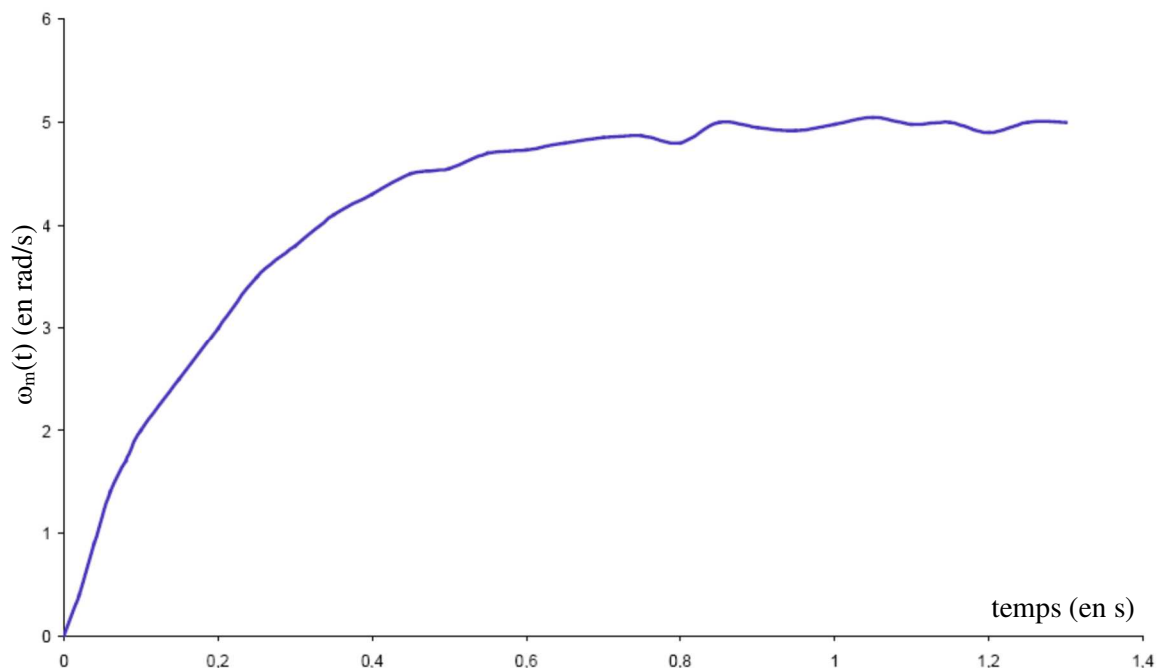
Rappel : Une courbe réponse d'un 1^{er} ordre à un échelon à une pente à l'origine non nulle et aucun dépassement.

- Le gain statique K peut être déterminé en relevant la valeur finale (permanente) : $s(\infty) = K.E_C$
- La constante de temps τ peut être déterminée de plusieurs manières :
 - a) au temps mis pour atteindre $0,63.K.E_C$ car $s(\tau) \approx 0,63.s(\infty)$
 - b) au temps mis pour atteindre $0,95.K.E_C$ (et en le divisant par 3) car $t_{5\%} = 3.\tau$ (à éviter car imprécis)
 - c) au temps correspondant à l'intersection entre la **tangente à l'origine** et l'asymptote finale
 - d) à partir d'une **tangente quelconque** à la courbe (cf. tracé ci-dessus) : la tangente à la courbe à une date quelconque t_1 coupe l'asymptote finale en t_2 , avec $t_2 - t_1 = \tau$. Cette méthode est très pratique pour relever τ lorsque ni le début ni la fin de la courbe n'est net.

Une fois les caractéristiques déterminées, il est préférable de tracer la réponse théorique et de la comparer à la courbe expérimentale afin de **valider le modèle** choisi !

Exemple d'un motoréducteur à courant continu (MCC)

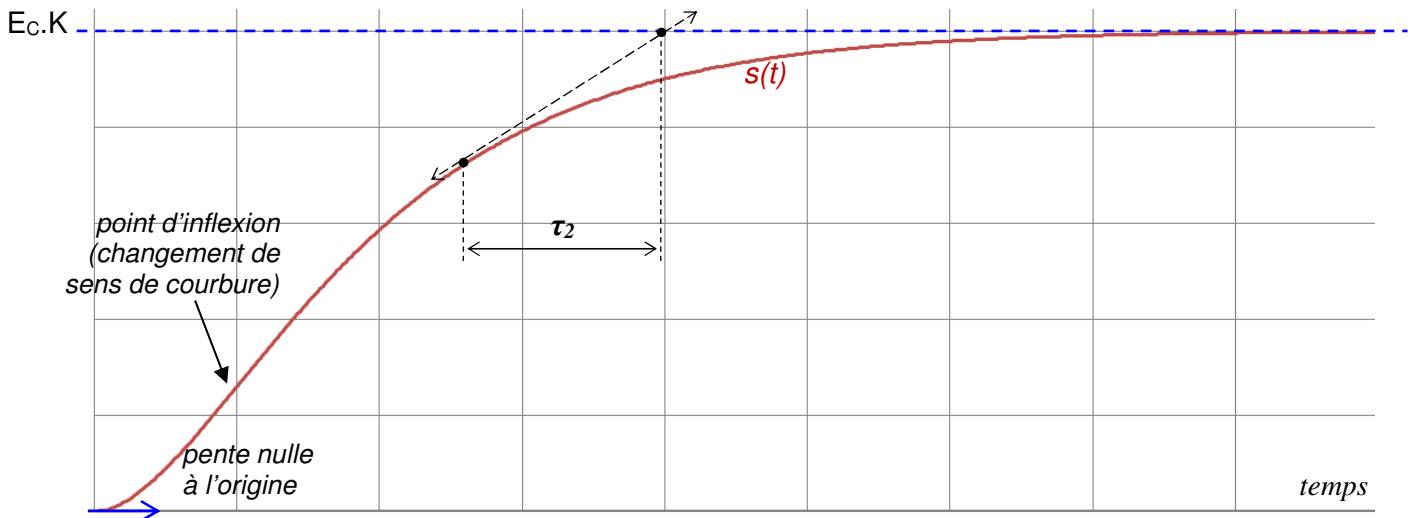
Déterminer les caractéristiques de la fonction de transfert du MCC dont la réponse à une entrée en échelon de 2,5 V est donnée ci-dessous. Utiliser les 4 méthodes différentes pour déterminer τ .



3.5.3) Identification à un système du 2e ordre apériodique (difficile)

Un 2^e ordre apériodique (sans dépassement) a une fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$

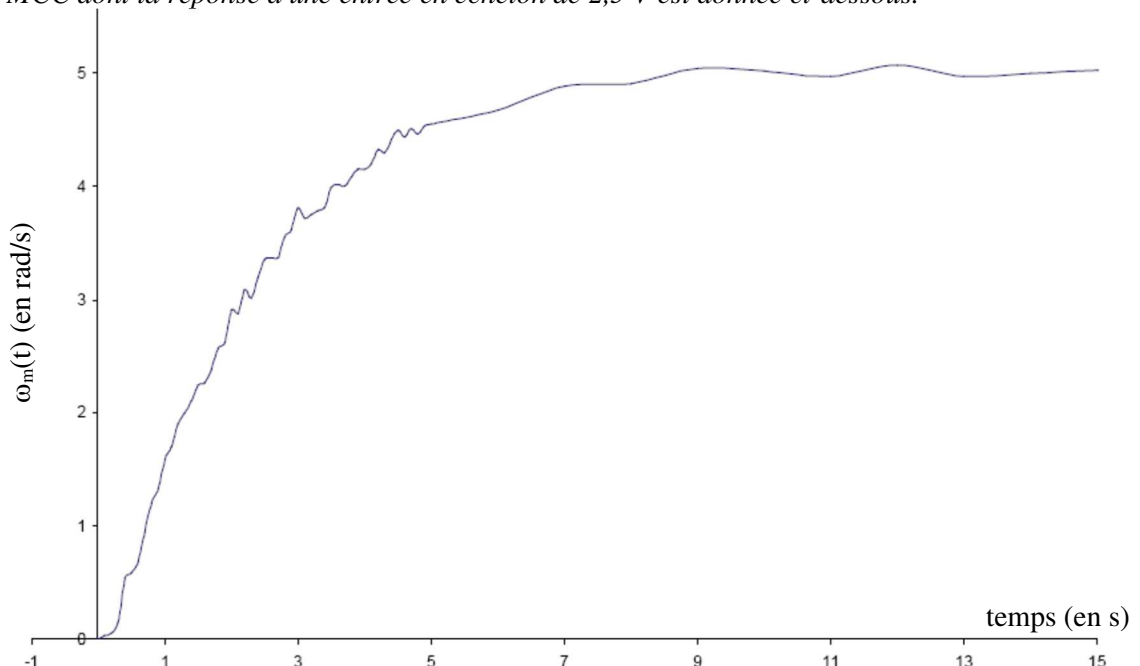
La réponse d'un 2^e ordre apériodique à une entrée en **échelon d'amplitude E_C** ne permet pas d'identifier facilement les valeurs des caractéristiques de la fonction de transfert, hormis le gain statique.



- Le **gain statique K** peut être déterminé en relevant la valeur finale (permanente) : $s(\infty) = K \cdot E_C$
- La **constante de temps dominante (la plus grande)**, notée τ_2 peut être approximée en considérant que la courbe est proche d'un **1^{er} ordre** de constante de temps τ_2 , après le point d'inflexion de la courbe. On peut alors utiliser la dernière méthode d'identification vue pour le 1^{er} ordre : tangente en un point quelconque de la courbe, après le point d'inflexion.
- La constante de temps la plus faible, notée τ_1 est très difficile à approximer, surtout si $\tau_1 \ll \tau_2$.
On pourra essayer avec le temps de réponse à 5% : $t_{R5\%} \approx 3 \cdot (\tau_1 + \tau_2)$;
ou encore lorsque la sortie atteint 63% de sa valeur finale : $0,63 \cdot s(\infty) \approx \tau_1 + \tau_2$

Une fois les caractéristiques déterminées, il est préférable de tracer la réponse théorique et de la comparer à la courbe expérimentale afin de **valider le modèle** choisi !

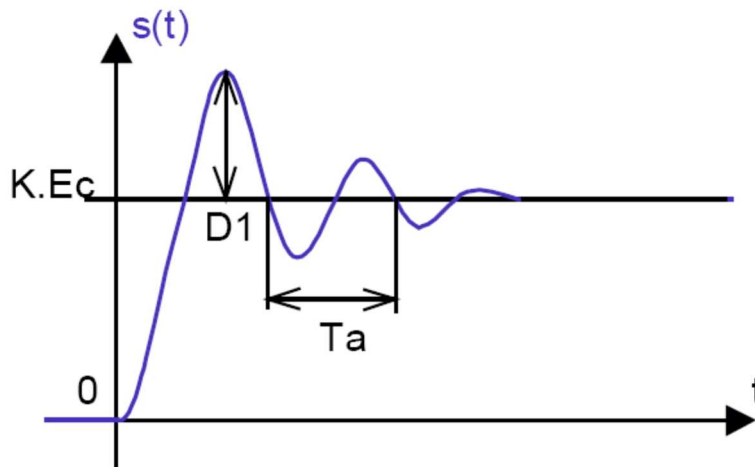
Exemple d'un motoréducteur à courant continu (MCC) asservi : Déterminer la fonction de transfert du MCC dont la réponse à une entrée en échelon de 2,5 V est donnée ci-dessous.



3.5.4) Identification à un système du 2^e ordre oscillant $0 < z < 1$

Un 2^e ordre oscillant (avec dépassement) a une fonction de transfert : $H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

avec $z < 1$. La réponse d'un 2^e ordre apériodique à une entrée en échelon d'amplitude E_C a cette allure :



Rappel : Une courbe réponse d'un 2^e ordre oscillant à un échelon a une pente à l'origine nulle et un dépassement.

- Le gain statique **K** peut être déterminé en relevant la valeur finale (permanente) : $s(\infty) = K.E_C$
- Le coefficient d'amortissement **z** (ou ξ) peut être déterminé en relevant le **premier dépassement** :

$$D_1 = K.E_C \cdot e^{-\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}} \quad \text{ou de préférence avec le dépassement relatif : } D_{1\%} = \frac{D_1}{s(\infty)} = e^{-\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Il vient donc : $z = \frac{|\ln D_{1\%}|}{\sqrt{(\ln D_{1\%})^2 + \pi^2}}$. Nous utiliserons l'abaque des dépassements pour déterminer z !

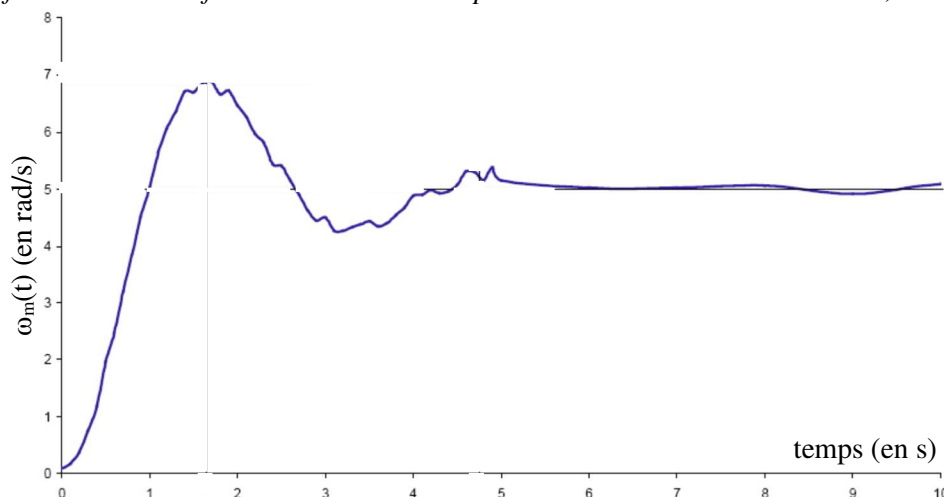
- La pulsation propre ω_0 peut être déterminée en relevant la **pseudo-période** T_a ou bien le temps de premier dépassement t_1 (avec $t_1 = T_a/2$) :

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_a} = \omega_0 \cdot \sqrt{1-z^2} \quad \text{donc} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_a \cdot \sqrt{1-z^2}} \quad \text{ou bien : } \omega_0 = \frac{\pi}{t_1 \cdot \sqrt{1-z^2}}$$

La pulsation propre peut aussi être déterminée grâce à l'abaque des temps de réponse à 5% réduits (donnée en annexe A3). Il convient de relever $t_{5\%}$ expérimentalement et de connaître z .

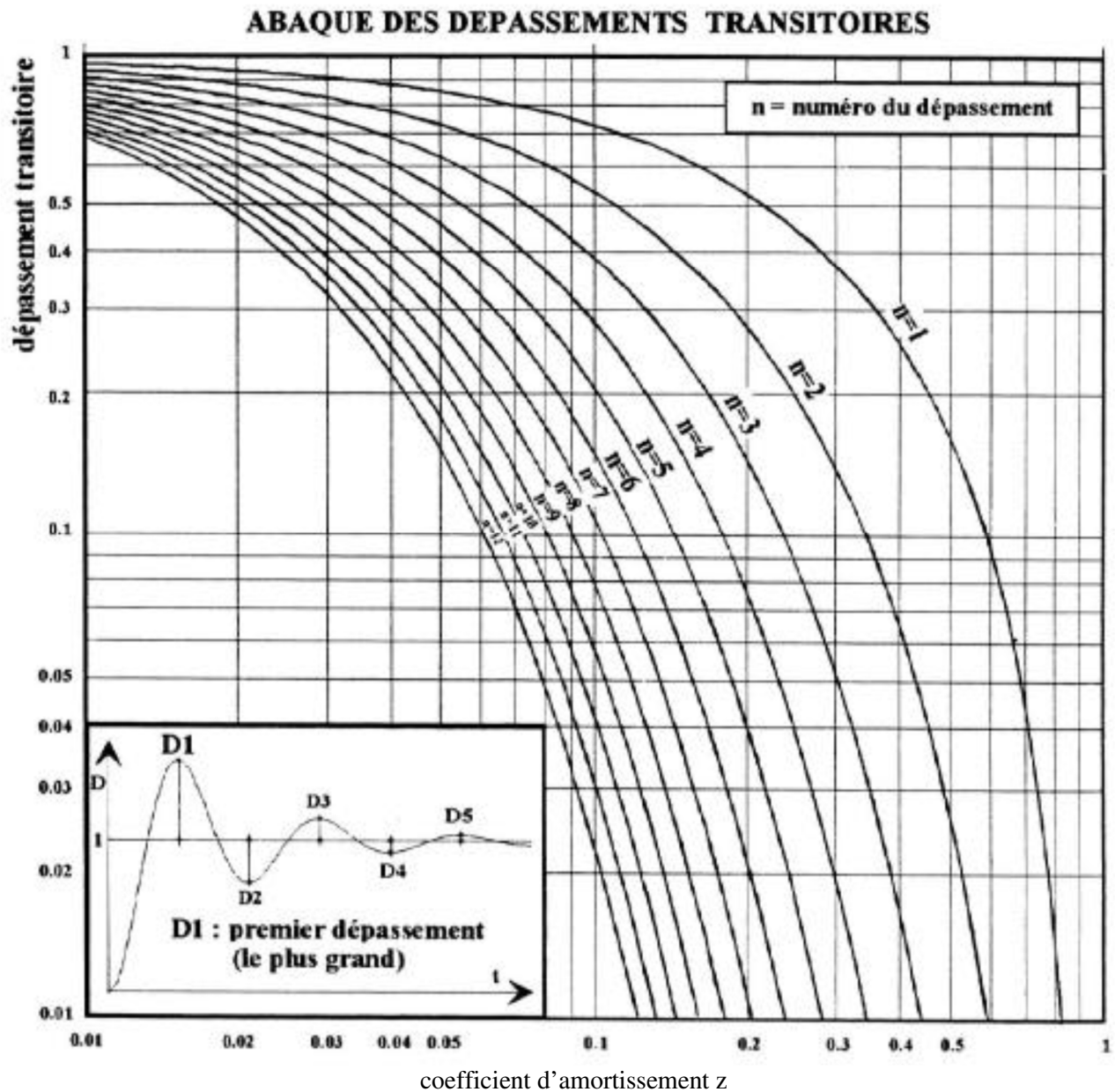
Une fois les caractéristiques déterminées, il convient toujours de tracer la réponse théorique et de la comparer à la courbe expérimentale afin de **valider le modèle** choisi !

Exemple d'un motoréducteur à courant continu (MCC) asservi : Déterminer les caractéristiques de la fonction de transfert du MCC dont la réponse à une entrée en échelon de 2,5 V est donnée ci-dessous.



ANNEXE A1 : ABAQUE DES DÉPASSEMENTS RELATIFS D'UN 2^E ORDRE OSCILLANT

Pour un système du 2^e ordre avec dépassement ($z < 1$), voici la valeur des différents dépassements relatifs, en fonction du coefficient d'amortissement et du numéro du dépassement :



ANNEXE A2 : TABLEAU DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES FONCTIONS USUELLES

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
Échelon (fonction constante) : $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe : $t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^n . u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-a.t} . u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-a.t} . u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n . e^{-a.t} . u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega.t) . u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega.t) . u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} . \sin(\omega.t) . u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a.t} . \cos(\omega.t) . u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\text{sh}(\omega.t) . u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch}(\omega.t) . u(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

Propriétés	$f(t)$	$F(p)$
linéarité	$[a.f_1(t) + b.f_2(t)].u(t)$	$a.F_1(p) + b.F_2(p)$
dérivation	$f'(t).u(t)$ $f''(t).u(t)$ $f^{(n)}(t).u(t)$	$p.F(p) - f(0)$ $p^2.F(p) - p.f(0) - f'(0)$ $p^n.F(p) \quad (\text{CI nulles})$
intégration	$\left(\int_0^t f(x).dx\right).u(t)$	$\frac{F(p)}{p}$
retard	$f(t-\tau).u(t-\tau)$	$e^{-\tau.p}.F(p)$
facteur d'échelle	$f(a.t).u(t) \quad \text{pour } a \neq 0$	$\frac{1}{a}.F\left(\frac{p}{a}\right)$
amortissement	$e^{-a.t}.f(t).u(t)$	$F(p+a)$
multiplication par t^n	$t^n.f(t).u(t)$	$(-1)^n . \frac{d^n F(p)}{dp^n}$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0^+} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p.F(p))$

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p.F(p))$

Donc, pente à l'origine : $\lim_{t \rightarrow 0^+} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p^2.F(p))$